Extrapolation

mit der Romberg-Folge $N_i = 2^{i-1}$

$1, 2, 4, 8, 16, \dots$

für die Trapezregel

$$\begin{tikzcd}
N_1 = 1 & T_{11} \arrow[dr] & & \\
N_2 = 2 & T_{21} \arrow[r] \arrow[dr] & T_{22} \arrow[dr] & \\
N_3 = 4 & T_{31} \arrow[r] & T_{32} \arrow[r] & T_{33}
\end{tikzcd}$$

läßt sich interpretieren als

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N_i} w_i\, f\left(\frac{i}{N_i}\right)$$

Vergleich mit Newton-Cotes

- Positivität der Gewichte
- Anzahl der Knoten für gegebene Ordnung
- Fehler für geg. Ordnung

Ordnung	Newton Cotes		Extrapolation	
3	Trapez	2	Trapez T_{11}	2
5	Simpson	3	T_{22}	3
	Newton	4		
7	Milne	5	T_{33}	5
	—	6		
9	Weddle	7	T_{44}	9

$p \qquad p-2 \qquad \sim 2^{p/2}$

ab $p = 11$
negative Gewichte

Bestimmung der Gewichte zur Extrapolation

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{N_i}{N_{i-k+1}}\right)^2 - 1}$$

es gilt $T_{i1} = \sum_{j=0}^{N_i} w_{i1j} f\left(\frac{j}{N_i}\right)$ mit $w_{i1j} = \begin{cases} \frac{1}{2N_i}, & j=0 \vee j=N_i \\ \frac{1}{N_i}, & \text{sonst} \end{cases}$

aus Extrapolation:

$$w_{ikj} = w_{i,k-1,j} + \frac{w_{i,k-1,j} - w_{i-1,k-1,j/2}}{\left(\frac{N_i}{N_{i-k+1}}\right)^2 - 1}$$

T_{11}

$\frac{1}{2} \; 0 \; \frac{1}{2}$

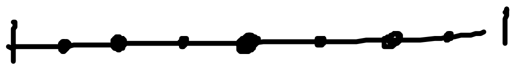
T_{21}

$\frac{1}{4} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{4}$ $\longrightarrow T_{22}$

also $w_{ikj} = 0$ falls $j \notin \mathbb{N}$

Beobachtung: alle Gewichte sind positiv

Extrapolation der Mittelpunktregel



M_{21}

Gauß - Quadratur auf unbeschränkten Intervallen

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die Dichte einer Häufigkeitsverteilung mit „gewisser Ähnlichkeit" zur Normalverteilung $e^{-\pi x^2}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Intervall $[-1, 1]$?

$$P[-1,1] = \frac{\int_{-1}^{1} h(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx}$$

← ok, summierte NC, Extrap, Gauß-Legendre

← ? unbeschränktes Gebiet !

Variante I: $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \approx \int_{-a}^{a} h(x)\,dx$

Variante II: Ansatz $h(x) = e^{-\pi x^2} f(x)$ mit f „glatt"

Gauß-Quadratur für $w(x)\ e^{-\pi x^2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Gauß-Hermite-Quadratur

Skalarprodukt $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) g(x)\,dx$

Orthogonalisierung der Monome

(i) $q_0 = 1$, Normierung

$$\|q_0\|^2 = (q, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} 1^2\,dx = 1$$

$\longrightarrow p_0 = 1$

(ii) $q_1 = x - \underbrace{(x, p_0)}_{=0} p_0 = x$

(iii) $q_2 = x^2 - (x^2, p_0) p_0 - \underbrace{(x^2, p_1)}_{=0} p_1$

$$= x^2 - \frac{1}{2\pi}$$

$$\|q_2\|^2 = \frac{1}{2\pi^2} \longrightarrow p_2 = \sqrt{2}\,\pi \left(x^2 - \frac{1}{2\pi}\right)$$

Stützstellen: Nullstellen von p_2

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \pm 0.3989\ldots$$

Gewichte: $1/2$

nachrechnen: Lagrange-Polynom

$$L_1(x) = \frac{x - \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)} = \frac{\sqrt{2\pi}\,x + 1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} L_1(x) = \frac{1}{2}$$

Beispiel: $f(x) = 1 + \cos 2\pi x$

$$f(0.3989) \approx 0.1949$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x)\,dx \approx 0.1949$$

exakter Wert: $1 + e^{-\pi} \approx 1.04321$

Höhere Ordnung: q_3 ist ungerade, spielt keine Rolle

$$q_4 = x^4 - (x^4, p_0) p_0 - (x^4, p_2) p_2$$

$$= x^4 - \frac{3}{4\pi^2} p_0 - \frac{3}{\sqrt{2}\,\pi^2} \sqrt{2}\,\pi \left(x^2 - \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$= x^4 - \frac{3}{\pi} x^2 + \frac{3}{4\pi^2}$$ Quadratische Gleichung in x^2

$$x^2 = \frac{\frac{3}{\pi} \pm \sqrt{\frac{9}{\pi^2} - 4\frac{3}{4\pi^2}}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2\pi}$$

Stützstellen $\pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2\pi}} \approx \pm 0.296$, ± 0.931

$$L_1(x) = \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2\pi}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2\pi}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2\pi}}\right)}{(y \quad)(y \quad)(y \quad)}$$

$$y = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2\pi}}$$

$$\longrightarrow \omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} L_1(x)\,dx = -\frac{5\sqrt{6} - 12}{2(\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6})(-\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6})}$$

$$\approx 0.045876$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} - \omega_1 \approx 0.454124$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} f(x) \approx 0.82446$$

mit 6 Stützstellen : $\underline{1.02}21$

8 : $\underline{1.04}22$

Etwas weniger anspruchsvoll :

$$f(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

exakt : $1.455938\ldots$

4 Stützstellen : $\underline{1.45}34$

6 : $\underline{1.4559}2$

8 : 1.455938...

Zum Vergleich: Variante 1 mit Gauß-Legendre 4 Stützstellen auf [-a, a]

Stützstellen $y \pm \sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$

Gewichte $w = \frac{18 \mp \sqrt{30}}{36}$