Matrixnormen

(i) induzierte Normen

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ Verträglichkeit (der Matrixnorm mit der Vektornorm)

u.U. schwierig zu berechnen

(ii) andere Normen

z.B. Frobenius-Norm: $\|A\|_F^2 := \sum_{ij} |a_{ij}|^2 = tr(A^H A)$

(euklidische Norm für Matrixeinträge als Vektor in $\mathbb{R}^{n \cdot m}$)

Frobenius-Norm ist mit der euklid. Norm verträglich,

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 \|x\|^2 &= \sum_{ij} a_{ij}^2 \|x\|^2 \\ &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^2 \right) \|x\|^2 \\ &= \sum_i \|A_i\|^2 \|x\|^2 \\ \text{CSU} \quad &\geq \sum_i \langle A_i, x \rangle^2 \\ &= \sum_i (Ax)_i^2 \\ &= \|Ax\|^2 \qquad \square \end{aligned}$$

Frobenius-Norm ist nicht induziert:

$$\|I\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1$$

aber $\|I\|_F = \sqrt{n}$

Kondition von lin. GLS

$Ax = b$

normweise Kondition, Eingabedaten: rechte Seite

Störung der rechten Seite: $b \to b + \delta b$

$$x \to A^{-1}(b+\delta b) = x + \underbrace{A^{-1}\delta b}_{=\delta x}$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{=\kappa_{abs}} \|\delta b\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \frac{\|b\|}{\|x\|}}_{\kappa_{rel}} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\kappa_{rel} = \|A^{-1}\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \boxed{\|A^{-1}\| \, \|A\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \boxed{\kappa(A)}$$

Also: $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

beschreibt die Verstärkung des relativen Fehlers (im worst case)

Bsp Vandermonde-Matrix $a_{ij} = x_j^{i-1}$ (Polynominterpolation)

Bsp:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \qquad \varepsilon \ll 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\varepsilon \\ & 1/\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eingabewert: ε

$$\kappa(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \, \|A\|_\infty = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot 2 \approx \frac{2}{\varepsilon}$$

aber: x ist unabhängig von ε! $\Rightarrow \kappa = 0$

Ursache: Matrix und rechte Seite sind strukturell gekoppelt.

Unabhängige rechte Seite: $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dann gilt $x = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon + 1 \\ 1/\varepsilon \end{bmatrix}$, also $\kappa_{abs} \approx \frac{1}{\varepsilon^2}$

$$\kappa_{rel} = \kappa_{abs} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x\|} \approx 1$$

nur die Richtung der Lösung x ist gut konditioniert, nicht aber die Länge!

Eingabe: rechte Seite

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ unabh. von } \varepsilon$$

Störung $\delta b = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ maximale Verstärkung des rel. Fehlers

(weil $b \propto$ EV zu maximalem EW
$\delta b \propto$ EV zu minimalem EW)

Zeilenskalierung mit $D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/\varepsilon \end{bmatrix}$

$$DAx = Db$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa(DA) = 2{,}6$$

Frage: was ist „die beste" Skalierung mit $\kappa(DA) = \min$?

Satz Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und zeilenäquilibriert:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1 \quad \text{f. a. } i$$

Dann gilt für alle regulären Diagonalmatrizen $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\kappa(DA)_\infty \geq \kappa(A)_\infty$$

Bew: Es gilt

$$\kappa(DA)_\infty = \|(DA)^{-1}\|_\infty \|DA\|_\infty$$

$$= \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty \max_i \sum_j |d_i a_{ij}|$$

$$= \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty \cdot \max_i |d_i| \underbrace{\sum_j |a_{ij}|}_{=1}$$

$$= \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty \cdot \|D\|_\infty$$

weiterhin

$$\kappa(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \cdot \underbrace{\|A\|_\infty}_{=1} = \|A^{-1}\|_\infty$$

$$= \|A^{-1}D^{-1}D\|_\infty$$

$$\leq \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty \cdot \|D\|_\infty$$

$$\Rightarrow \kappa(A)_\infty \leq \kappa(DA)_\infty$$

□

Stabilität der LR-Zerlegung $A = LR$

Erinnerung: Stabilitätsfaktor σ

$$\frac{\|\hat{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \sigma \cdot \kappa_{rel} \cdot eps$$

$$f = h \circ g \Rightarrow \sigma_f \kappa_f \leq \sigma_h \kappa_h + \kappa_h \sigma_g \kappa_g$$

hier $f = A^{-1} = R^{-1} \circ L^{-1}$

also $\quad \sigma_{LR}\, \kappa(A) \le \sigma_R\, \kappa(R) + \kappa(R)\, \sigma_L\, \kappa(L)$

(unrealistisch) optimistischer Ansatz : $\quad \sigma_R = \sigma_L = 1$

gesamte Fehlerverstärkung
der relativen Fehler

$$\boxed{\sigma_{LR}\, \kappa(A) \approx \kappa(R) + \kappa(R)\,\kappa(L)}$$

Kondition ist submultiplikativ:

$$\begin{aligned}
\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| &= \|R^{-1}L^{-1}\| \cdot \|LR\| \\
&\le \|R^{-1}\| \cdot \|L^{-1}\| \cdot \|L\| \cdot \|R\| \\
&= \kappa(R) \cdot \kappa(L)
\end{aligned}$$

<u>Bsp</u> worst case Wilkinson

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$