Iterative Lösung linearer Gleichungs-Systeme

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = Ax - b = 0$$

Newtonverfahren: $\quad F'(x)\Delta x = -F(x)$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

Newtonkorrektur $\quad A\Delta x = -(Ax - b)$

inexaktes Newtonverfahren $\quad M\,\delta x = -F(x), \qquad M \approx F'(x)$

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k$$

$$\Rightarrow \quad F'(x_k)\,\delta x_k = -F(x_k) + r_k$$

einfache Wahl von M:

- ∇ obere Dreiecksmatrix von $F'(x) = A$
- $\diagdown$ Diagonale von A
- ....

Umsetzung: $\quad x_{k+1} = x_k + \delta x_k$

$$= x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

$$\Rightarrow \quad Mx_{k+1} = Mx_k + b - Ax_k$$

$$= \underbrace{(M - A)}_{=:N}x_k + b$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$$

Konvergenz: $$\frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \le TOL$$

$$\|F(x+\delta x)\| \le \left(TOL + \frac{\beta\gamma^2(1+TOL)^2}{2}\|F(x)\|\right)\|F(x)\|$$

$\|F'(x) - F'(y)\| \le \beta\|x-y\|$ hier: $\beta = 0$ weil F' konstant

$\Rightarrow$ $\|F(x+\delta x)\| \le TOL\,\|F(x)\|$: $TOL < 1 \Rightarrow$ Konvergenz

$$\begin{aligned} TOL &\le \max \frac{\|r\|}{\|F(x)\|} \\ &= \max \frac{\|F'(x)\delta x + F(x)\|}{\|F(x)\|} \\ &= \max_{F\in\mathbb{R}^n} \frac{\|-AM^{-1}F + F\|}{\|F\|} = \max_F \frac{\|(I - AM^{-1})F\|}{\|F\|} \\ &\le \|I - AM^{-1}\| \\ &= \|\underbrace{(M-A)}_{=:N} M^{-1}\| \overset{!}{<} 1 \end{aligned}$$

Konvergenz, falls $\|NM^{-1}\| < 1$.

Aussage gilt für <u>alle</u> induzierten Normen: wählen Norm $\|\cdot\|$, so daß $\|NM^{-1}\|$ minimal.

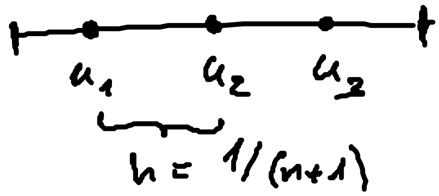
$\rightarrow$ Konvergenz, falls $\rho(NM^{-1}) < 1$.

$$\rho(NM^{-1}) = \rho(M^{-1}NM^{-1}M) = \rho(M^{-1}N)$$

Bsp: Randwertproblem $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$

$$\varepsilon u''(x) + \delta \cdot u'(x) = f(x)$$

Diskretisierung: $u_i = u(i/n)$, $i = 1, \dots, n$



äquidistant

$$u'(i/n) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$u''(i/n) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Einsetzen für $x = i/n$, $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\varepsilon}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) + \frac{\delta}{h}\left(u_{i+1} - u_i\right) = f_i, \; i = 1, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\varepsilon}{h^2} - \frac{\delta}{h} & \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{\delta}{h} & & \\ \frac{\varepsilon}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{\delta}{h} \\ & & \frac{\varepsilon}{h^2} & -\frac{2\varepsilon}{h^2} - \frac{\delta}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Konvergenzgeschwindigkeit:

$$x_{k+1} - x_* = M^{-1} N x_k + M^{-1} b - x_*$$

$$= M^{-1}N x_k + M^{-1}A x_* - x_*$$
$$= M^{-1}N x_k + M^{-1}(A x_* - M x_*)$$
$$= M^{-1}(N x_k + \underbrace{(A-M)}_{N} x_*)$$
$$= M^{-1}N(x_k - x_*)$$

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \rho(M^{-1}N)\,\|x_k - x_*\|$$
$$\leq \underbrace{\rho(M^{-1}N)}_{<1}{}^{k+1}\,\|x_0 - x_*\|$$

Seien φ_i Eigenvektoren von $M^{-1}N$ zu Eigenwerten λ_i

und $x_0 - x_* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$

$$\Rightarrow x_k - x_* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k \varphi_i$$