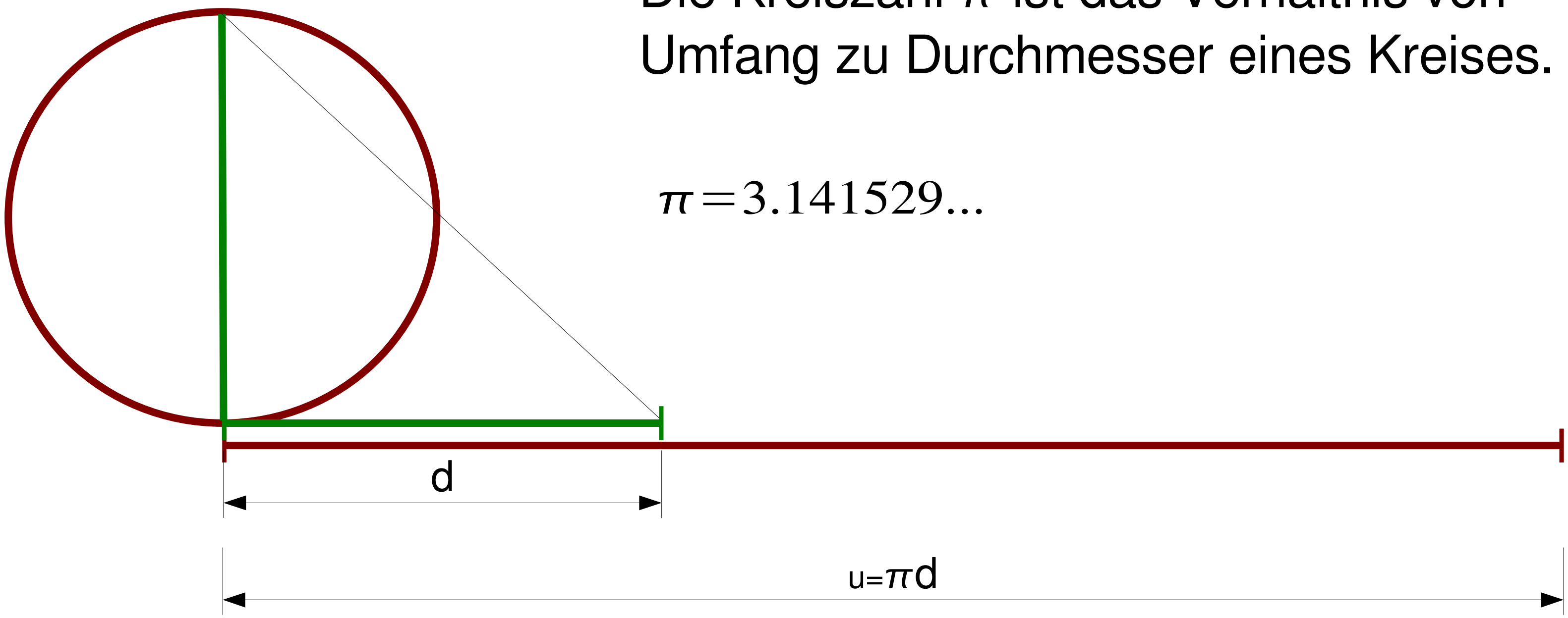
Wer traut noch dem Computer?

oder

Ist Pi gleich Null?

Martin Weiser
Zuse Institut Berlin

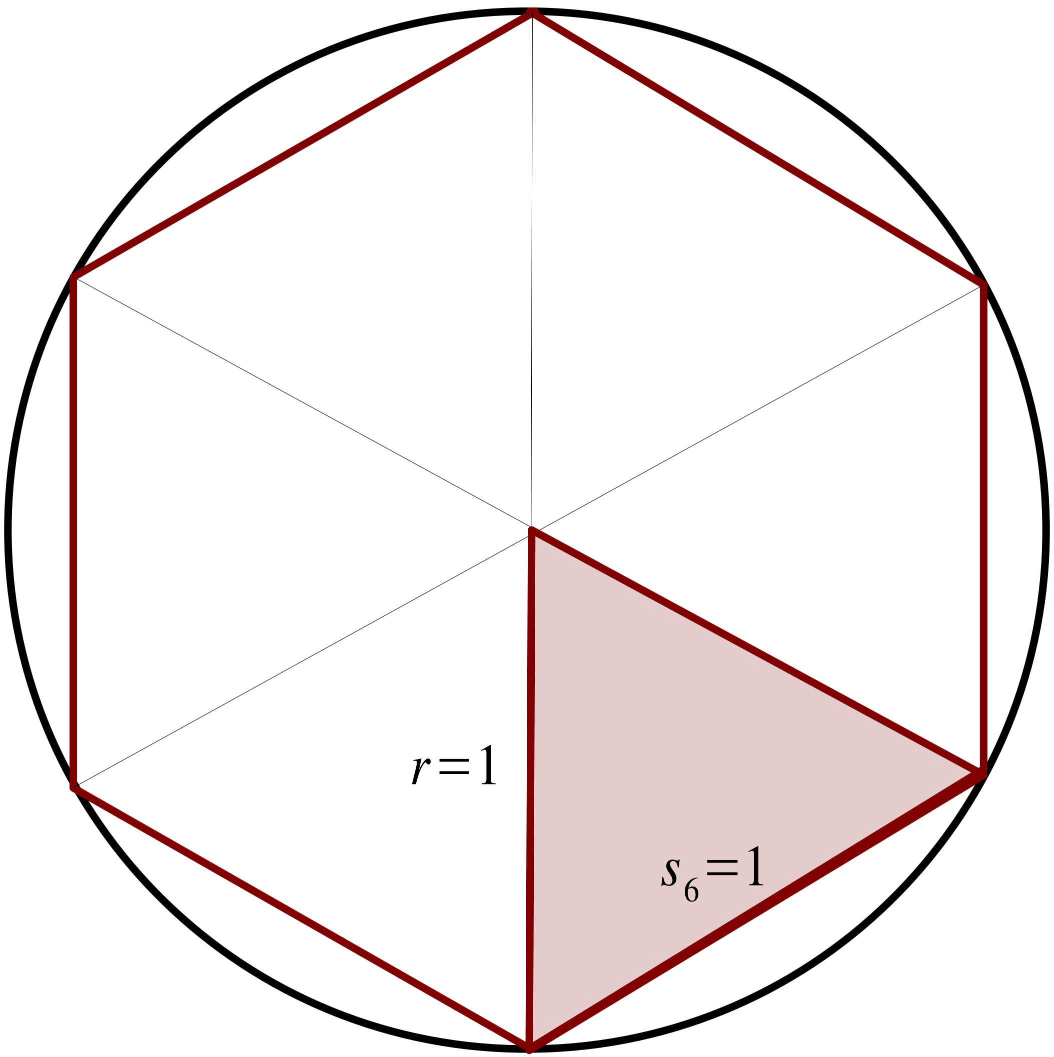
Die Kreiszahl π



Die Kreiszahl π ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises.

$$\pi = 3.141529...$$

Wie berechnet man π?



Wir berechnen den Umfang eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks als Näherung für den Umfang des Umkreises.

Besonders einfach: Sechseck

Die Seiten eines regelmäßigen 6-Ecks sind so lang wie der Radius des Umkreises.

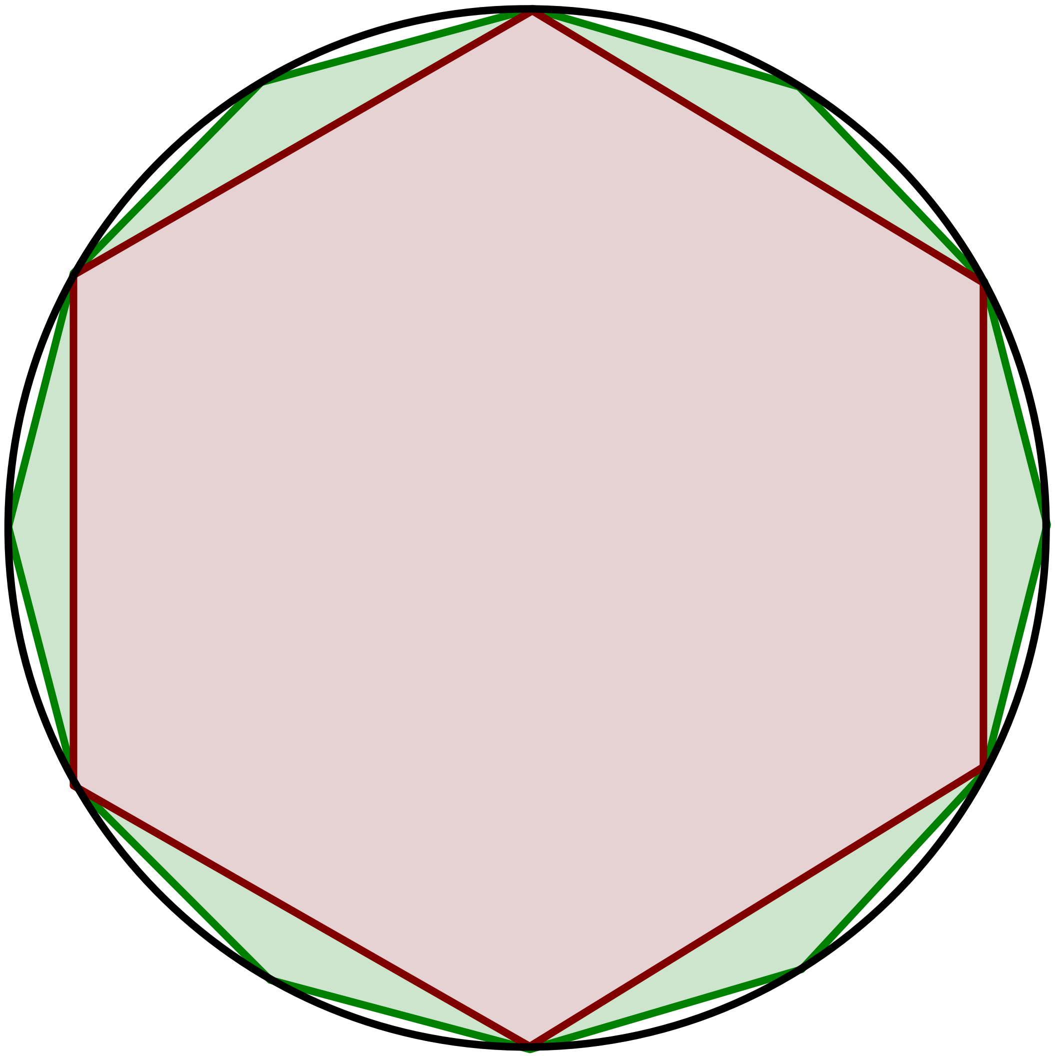
Wir erhalten

$$u_6 = 6\mathrm{r} = 3\mathrm{d}$$

und

$$\pi_6 = 3$$

Genauere Näherungen

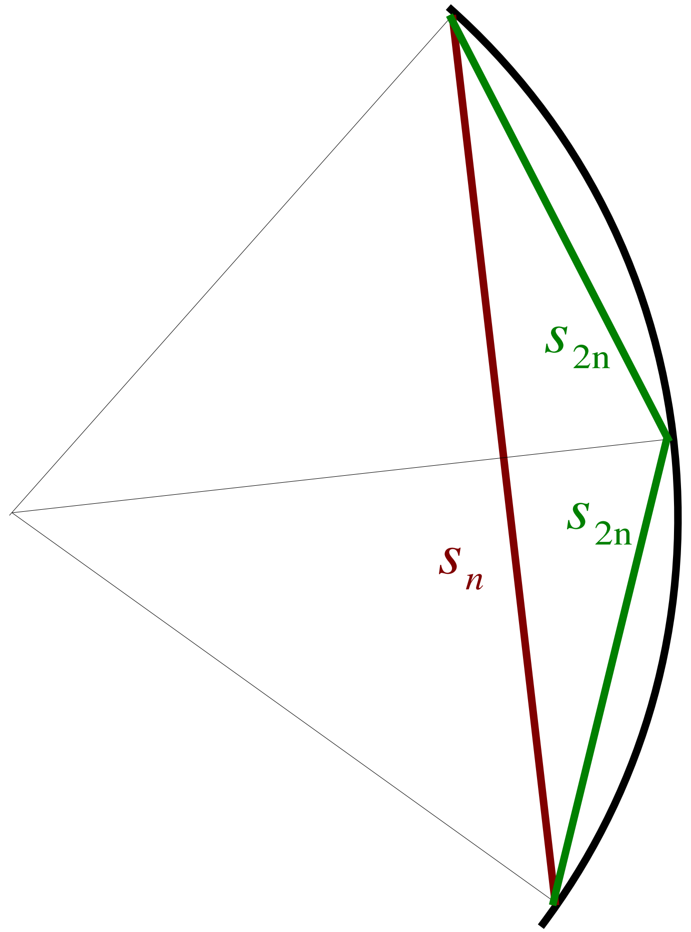


Je mehr Ecken das n-Eck hat, desto genauer ist die Näherung des Umfangs.

Zum Beispiel erhalten wir

$$u_{12} = 6.21166$$
$$\pi_{12} = 3.10583$$

Wie berechnet man π?



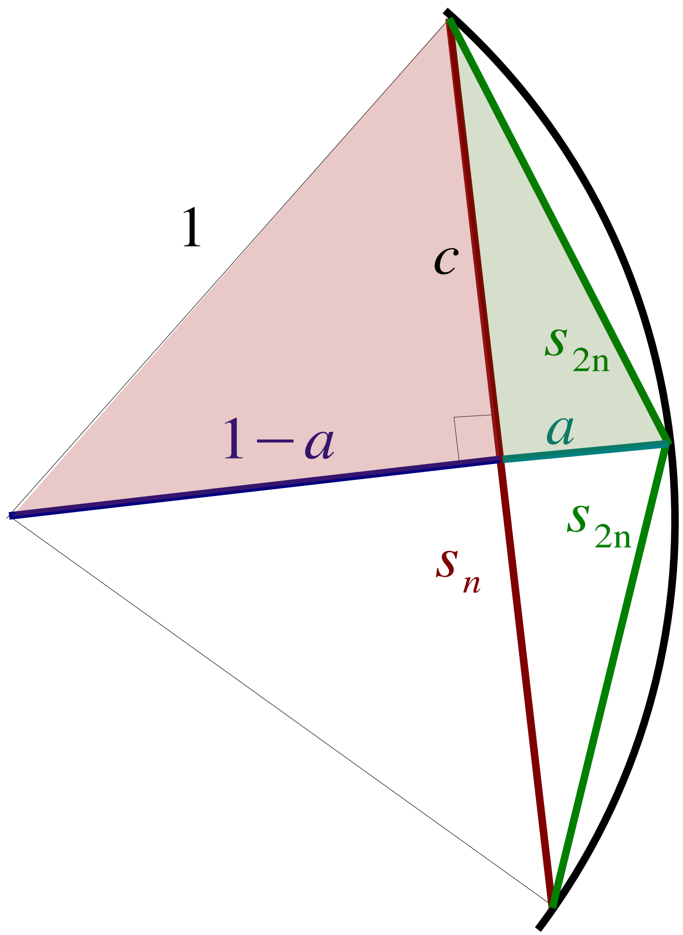
Mit s_n bezeichnen wir die Seitenlänge des regelmäßigen n-Ecks. Je größer wir n wählen, desto genauer ist unsere Näherung.

Verdoppeln wir n, so können wir s_{2n} besonders einfach aus s_n berechnen.

Zur Vereinfachung setzen wir $r = 1$

Die Formel für π

s_{2n} ist zu berechnen!



Erste Beobachtung: $2\,s_{2n} > s_n$

Pythagoras: sei $c = s_n/2$

$$\cancel{1^2} = (1-a)^2 + c^2 = \cancel{1} - 2a + a^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + c^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c^2}$$

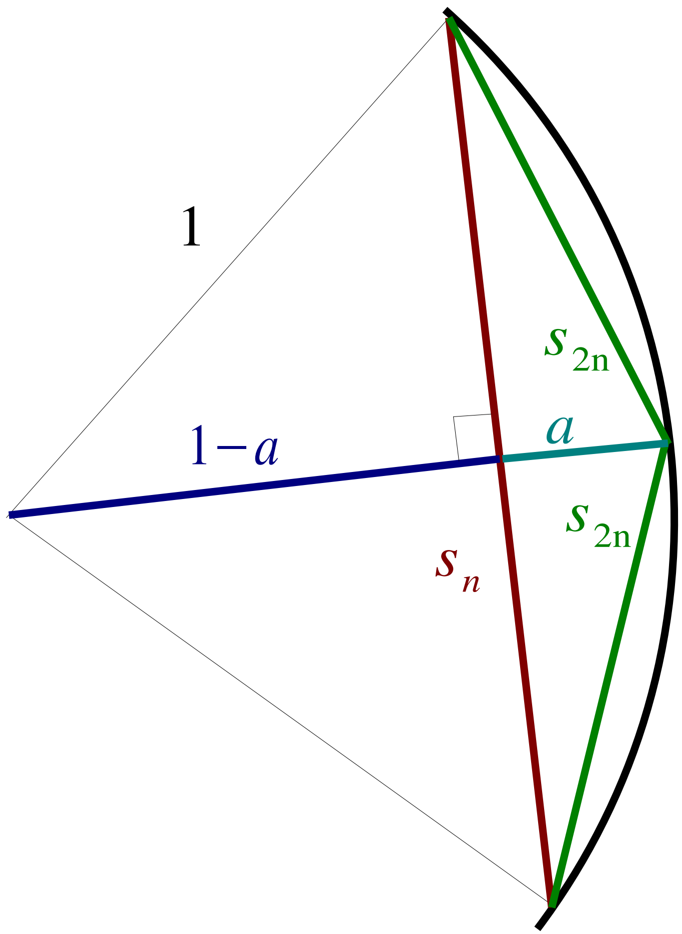
Nochmal Pythagoras:

$$s_{2n}^2 = a^2 + c^2 = \left(1 - \sqrt{1-c^2}\right)^2 + c^2$$

$$= 1 - 2\sqrt{1-c^2} + \left(1 - \cancel{c^2}\right) + \cancel{c^2}$$

$$= 2 - 2\sqrt{1-c^2}$$

Die Formel für π



Zusammen: $$s_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (s_n/2)^2}}$$

$$u_{2n} = 2n\, s_{2n}$$

$$\pi_{2n} = u_{2n}/2$$

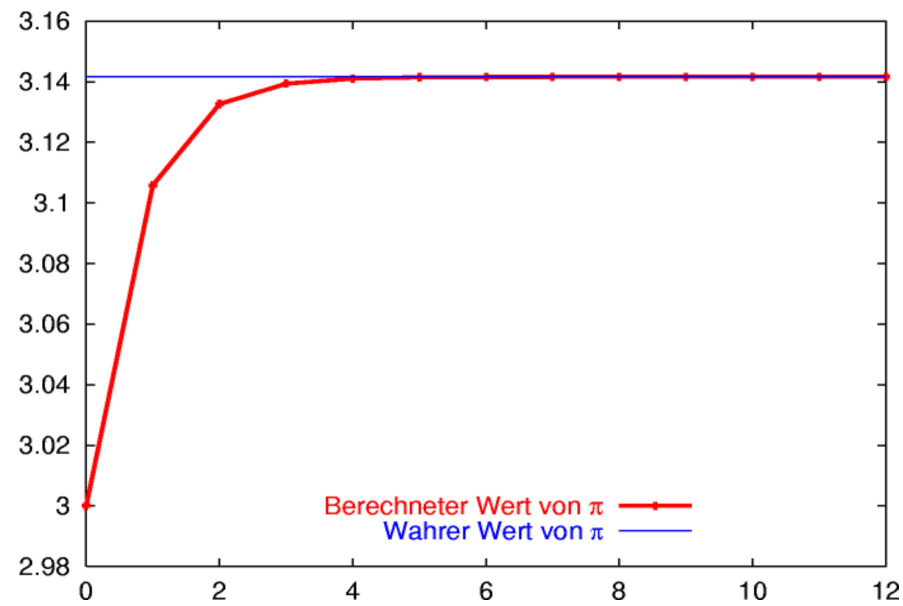
Als Computerprogramm:

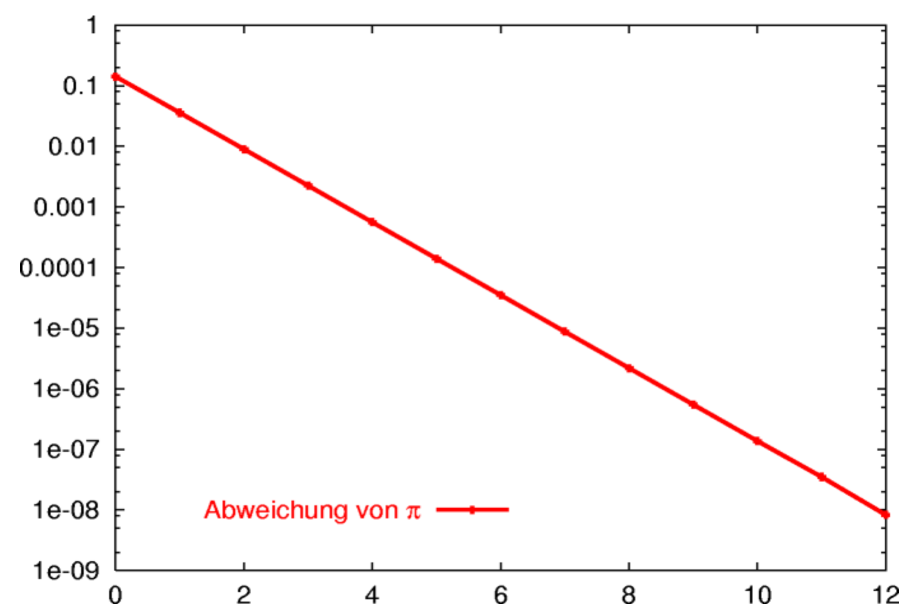
```
s = 1
n = 6
for i = 1 to 10
  s = sqrt(2-2*sqrt(1-(s/2)^2))
  n = 2*n
  u = n*s
  print “pi = “, u/2
end
```

Ausrechnen!

Berechnete Werte

i	n	π_n
0	6	3.000000
1	12	3.105829
2	24	3.132629
3	48	3.139350
4	96	3.141032
5	192	3.141452
6	384	3.141558
7	768	3.141584
8	1536	3.141590
9	3072	3.141592
10	6144	3.141593
11	12288	3.141593
12	24576	3.141593

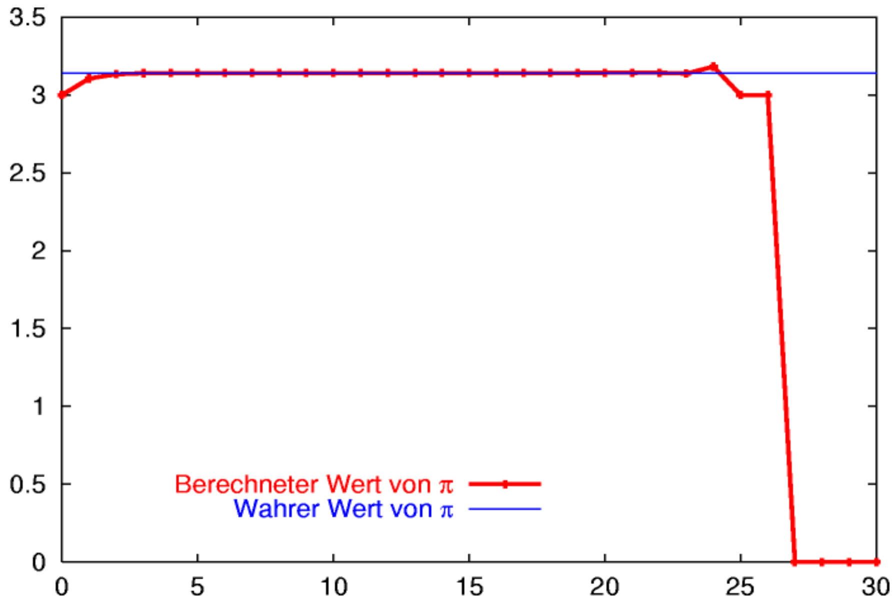


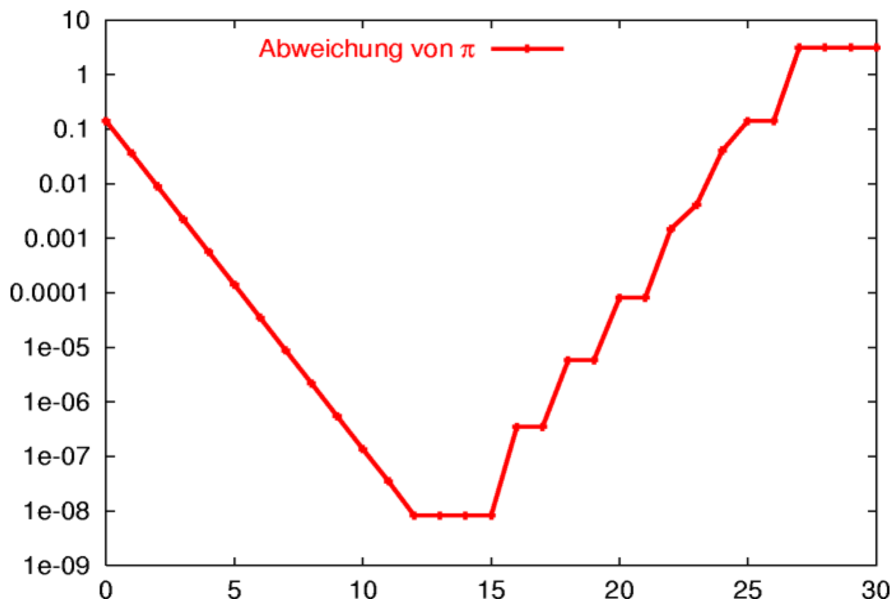


Hoppla!

Berechnete Werte

0	6	3.0000000000
1	12	3.1058285412
2	24	3.1326286133
3	48	3.1393502030
4	96	3.1410319509
5	192	3.1414524723
6	384	3.1415576079
7	768	3.1415838921
8	1536	3.1415904632
9	3072	3.1415921060
10	6144	3.1415925166
11	12288	3.1415926186
12	24576	3.1415926453
13	49152	3.1415926453
14	98304	3.1415926453
15	196608	3.1415926453
16	393216	3.1415923038
17	786432	3.1415923038
18	1572864	3.1415868397
19	3145728	3.1415868397
20	6291456	3.1416742650

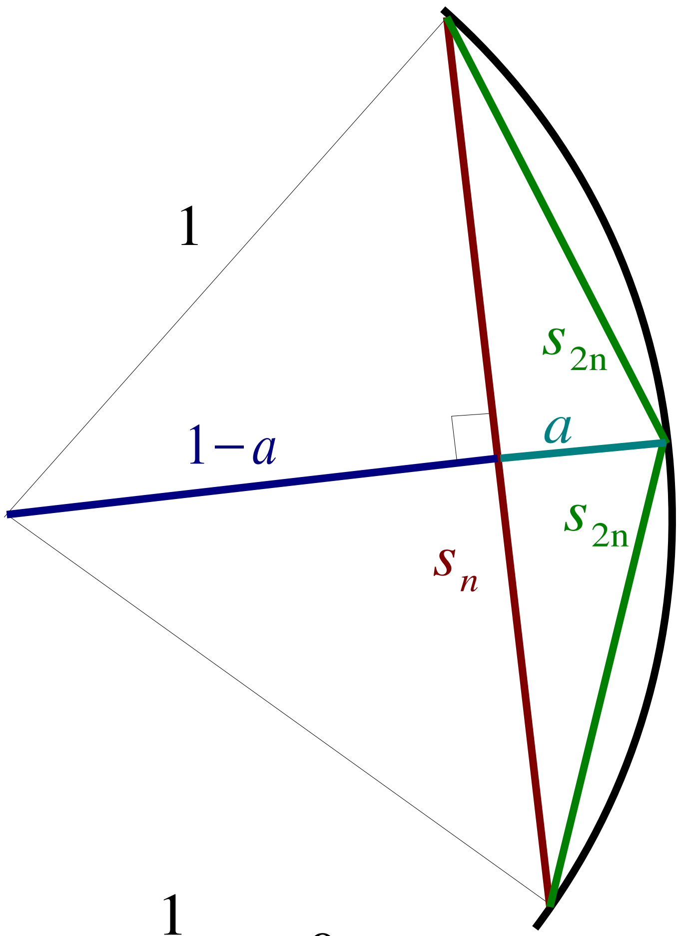




Wo steckt der Fehler?

Berechnete Seitenlängen

```
10 1.022654e-03
11 5.113269e-04
12 2.556635e-04
13 1.278317e-04
14 6.391587e-05
15 3.195793e-05
16 1.597896e-05
17 7.989482e-06
18 3.994734e-06
19 1.997367e-06
20 9.987114e-07
21 4.993557e-07
22 2.497890e-07
23 1.246721e-07
24 6.322027e-08
25 2.980232e-08
26 1.490116e-08
27 0.000000e+00
28 0.000000e+00
```



$$s_{2n} > \frac{1}{2} s_n > 0$$

Ausgelöscht!

Zahldarstellung im Rechner: $0.00000\,12345 = 1.2345 \cdot 10^{-6}$

Mantisse

Exponent

Was wird tatsächlich gerechnet?

$$s_n/2 = 1.0227 \cdot 10^{-3}$$

Rundung

$$\left(s_n/2\right)^2 = 1.0459\,1529 \cdot 10^{-6} \xrightarrow{\text{Rundung}} 1.0459 \cdot 10^{-6}$$

$$1-\left(s_n/2\right)^2 = \begin{array}{r} 1.0000\,000000 \cdot 10^{0} \\ -0.0000\,010459 \cdot 10^{0} \\ \hline =0.9999\,989541 \cdot 10^{0} \end{array} = 1.0000 \cdot 10^{0}\,!$$

Die Subtraktion sehr kleiner Zahlen von der 1 vernichtet Information...

$$s_{2n} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(s_n/2\right)^2}} = 0.0000 \cdot 10^{0}$$

... die hier wieder gebraucht würde:

$$\begin{array}{r} 2.000000000 \\ -1.999998954 \\ \hline 0.000001046 \end{array} = 1.0460 \cdot 10^{-6}$$

Auslöschung führender Ziffern

Fehlerbehebung

In diesem Fall ist die Auslöschung leicht zu vermeiden:

$$2-2\sqrt{1-c^2}=\frac{\left(2-2\sqrt{1-c^2}\right)\left(2+2\sqrt{1-c^2}\right)}{2+2\sqrt{1-c^2}}$$

Erweitern mit $2+2\sqrt{1-c^2}$

$$=\frac{2^2-\left(2\sqrt{1-c^2}\right)^2}{2+2\sqrt{1-c^2}}$$

3. binomische Formel

$$=\frac{4c^2}{2+2\sqrt{1-c^2}}$$

$c^2=1.0459\cdot 10^{-6}$ richtig

$4c^2=4.1836\cdot 10^{-6}$ richtig

$1-c^2=1.0000\cdot 10^{0}$ falsch: Informationsverlust!

$2+2\sqrt{1-c^2}=2.0000\cdot 10^{0}$ aber: diese Information wird nicht benötigt!

$\dfrac{4c^2}{2+2\sqrt{1-c^2}}=2.0918\cdot 10^{-6}$ richtig

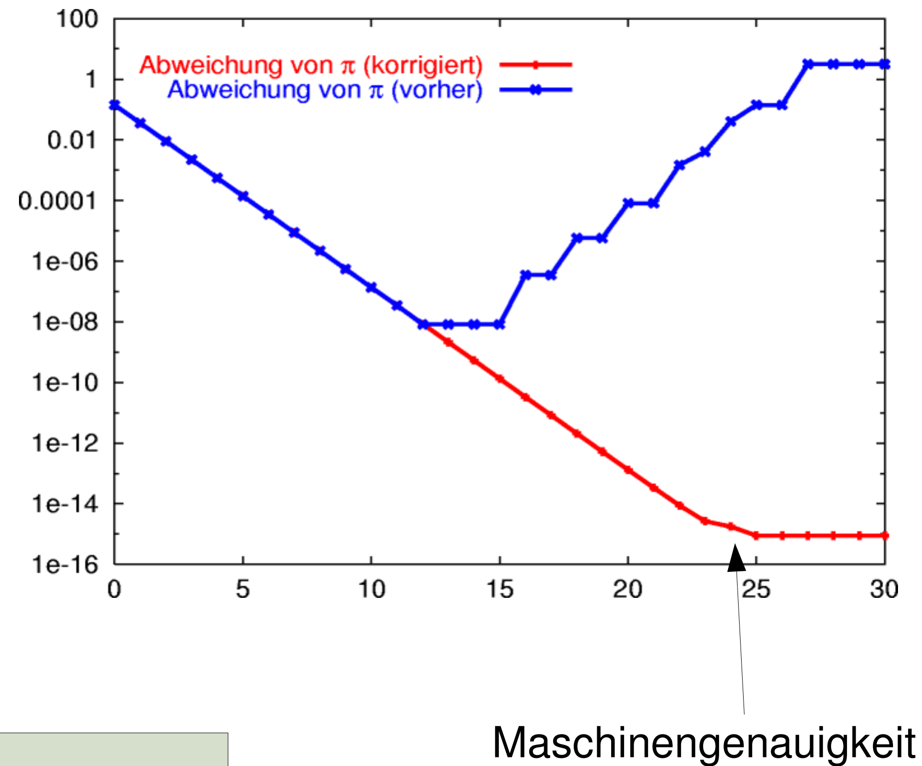
Der Lohn der Mühe

Zusammen:

$$s_{2\mathrm{n}} = \frac{s_n}{\sqrt{2+2\sqrt{1-\left(s_n/2\right)^2}}}$$

$$u_{2\mathrm{n}} = 2\mathrm{n}\, s_{2\mathrm{n}}$$

$$\pi_{2\mathrm{n}} = u_{2\mathrm{n}}/2$$



Als Computerprogramm:

```
s = 1
n = 6
for i = 1 to 10
  s = s/sqrt(2+2*sqrt(1-(s/2)^2))
  n = 2*n
  u = n*s
  print "pi = ", u/2
end
```

Numerische Fehler in der Praxis

Golfkrieg 1991

Einschlag einer irakischen Scud-Rakete in Dahran (Saudi-Arabien).

Das Raketenabwehrsystem Patriot versagte:
100 Todesopfer

Ursache: Auslöschung bei Flugbahnberechnungen

Börsencrash in Vancouver

„Absturz“ des Börsenindex in Vancouver
von 1000 auf 580 Punkte in zwei Jahren.

Die Aktien entwickelten sich dennoch gut.

Ursache: Auslöschung bei Indexberechnungen

Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

und

$$b^2 - 4\mathrm{ac} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

Beispiel: $$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - 10^{12}\right) \;=\; x^2 - \left(10^{12} + \frac{1}{3}\right)x + \frac{10^{12}}{3} \;=\; 0$$

$$a = 1$$

$$b = 10^{12} + \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{10^{12}}{3}$$

$$x_1 = \frac{10^{12} + \frac{1}{3} - \sqrt{\left(10^{12} + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot 10^{12}}}{2}$$

exakter Wert: $\frac{1}{3}$

$$x_2 = \frac{10^{12} + \frac{1}{3} + \sqrt{\left(10^{12} + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot 10^{12}}}{2}$$

exakter Wert: 10^{12}

Fazit

- Beim Rechnen mit dem Computer treten Rundungsfehler auf.
- Rundungsfehler können sich massiv aufsummieren, bis hin zur Unbrauchbarkeit des Resultats.
- Durch richtige Wahl der Berechnungsvorschriften können diese Fehler häufig vermieden werden.

Der Computer ersetzt nicht das Denken!

Wir müssen seine Berechnungen immer kritisch hinterfragen!

Hier hilft die Mathematik.