FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo/Weber)

Zusatzzettel “Die Matrix einer linearen Abbildung”

Lernziel: die Matrix-Darstellung linearen Abbildungen

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit $\dim V = n$,und $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ eine Basis von V. Sei

$$f : V \to W$$

eine lineare Abbildung. Das Bild $f(\mathbf{v}_i)$ von der Basiselementen ist auch ein Element von V, und lässt sich als lineare Kombination von $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\
&f(\mathbf{v}_2) = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\
&\ldots \\
&f(\mathbf{v}_n) = a_{n1}\mathbf{v}_1 + a_{n2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

wobei jeder Koeffizient a_{ij} die Komponent von $f(\mathbf{v}_i)$ auf $\mathbf{v}_j$ entspricht.

Die Matrix $A_{B_1} = (a_{ij})$ bestimmt eindeutig f. Das Bild eines beliebiges Vektor $\mathbf{w} \in V$, mit $\mathbf{w} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$, kann man durch A berechnen:

$$f(\mathbf{w}) = f\left(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_i \lambda_i \sum_j a_{ij}\mathbf{v}_j \,.$$

A_{B_1} wird *die Matrix von f in der Basis B* genannt.

Basiswechsel für Abbildungen. Die Matrix einer lineare Abbildung ist von der ausgewahlten Basis abhängig. Seien B_2 eine zweite Basis von V und A_{B_2} die Matrix von f in dieser Basis. Es gilt

$$A_{B_2} = T_{1\to 2} A_{B_1} T_{2\to 1} = T_{2\to 1}^{-1} A_{B_1} T_{2\to 1}$$

wobei $T_{2\to 1}$ die Transformazionsmatrix ist, die den Basiswechsel (B_2 nach B_1) durch führt. Die letzte Gleichung kann man so lesen: A_{B_2} ($= f$ in der Basis B_2) ist die Komposition von

1. Koordinatenwechsel zu den Basis B_1,
2. f in der Basis B_1,
3. Koordinatenwechsel zurück zu den Basis B_2.