

$$\cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right)$$

$$\left(\frac{1}{i^2} = -1 \right)$$

$$= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) - (e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})}{4}$$

$$= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy} - (e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy})}{4}$$

$$= \frac{2e^{ix}e^{-iy} + 2e^{-ix}e^{iy}}{4} = \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} = \cos(x-y)$$

⇒

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$