FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

# Definitionen-Zettel Nr. 13

---

**Lernziel: Äquivalenzrelation, Äquivalenzklassen. Homomorphiesatz.**

---

**Definition 13.1:** Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation auf einer Menge A,** wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $a \sim a$ für alle $a \in A$ (Reflexivität),
(ii) $a \sim b \iff b \sim a$ für alle $a, b \in A$ (Symmetrie) und
(iii) $a \sim b \ \wedge \ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ für alle $a, b, c \in A$ (Transitivität).

**Definition 13.2:** Die **Äquivalenzklasse** $[a]_R$ (oder auch $[a]$, $[a]_\sim$, $\bar{a}, \frac{a}{R}$) eines Elements $a \in A$ bezüglich einer Äquivalenzrelation R ist definiert als die Menge aller Elemente $x \in A$, die äquivalent zu $a$ sind $[a]_R = \{x \in A : x \sim a\}$.

**Definition 13.3:** Die **Faktormenge/Quotientenmenge** A/~ bezüglich einer Äquivalenzrelation ~ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von ~.

Sei (A,+) eine (abelsche) Gruppe und $B \subseteq A$ eine Untergruppe, dann ist die Faktormenge **A/B** definiert durch folgende Äquivalenzrelation: Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \iff a - b \in B$. Solche speziellen Faktormengen kann man also für alle algebraischen Strukturen definieren, in denen es (abelsche) Gruppen gibt. Das führt dann zu Faktorgruppen, Faktorräumen, Faktorringen…

**Satz:** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Körper genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

**Satz (Homomorphiesatz):** Für eine lineare Abbildung $f: V \to U$ gilt, dass $V/\ker f$ ein Vektorraum ist, der isomorph zu $im\ f$ ist.

Entsprechende Homomorphiesätze gelten auch für Gruppen, Ringe, …