

Definitionen-Zettel Nr. 8

Lernziel: Übersicht über die gelernten Multiplikationsregeln.

Die Addition ist eigentlich immer komponentenweise definiert, so dass hier wenig Verwirrung möglich ist. Jedoch gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Multiplikationsregeln, die hier einmal an Hand von Beispielen zusammengestellt werden sollen.

Multiplikation einer reellen Zahl (oder eines Körperelements) mit einem Vektor:

$$\lambda v = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Also auch komponentenweise.

Multiplikation einer reellen Zahl (oder eines Körperelements) mit einer Matrix:

$$\lambda A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ -12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Wiederum komponentenweise.

Multiplikation zweier Matrizen:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Merken Sie sich diese Multiplikationsregel anhand des Falk-Schemas.

Skalarprodukt (engl. dot product) / Spezialfall des Matrixproduktes:

$$v^T w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2$$

Manchmal wird dieses Produkt auch als $v \cdot w$ geschrieben, was mir persönlich jedoch nicht so gut gefällt. Das Ergebnis eines Skalarproduktes ist der Cosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren multipliziert mit Ihren beiden Beträgen.

Vektorprodukt/Kreuzprodukt (engl. cross product):

In 2D (komplexe Zahlen):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 11 \\ 3 \cdot 11 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Graphisch kann man sich diese Multiplikationsregel am besten in Polarkoordinaten vorstellen, dann addieren sich die Argumente und die Beträge multiplizieren sich.

In 3D:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Graphisch kann man sich das so vorstellen, dass das Kreuzprodukt einen Vektor ergibt, der senkrecht zu den beiden Faktoren steht. Die Länge des Ergebnisvektors entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Faktoren aufgespannt wird.

In 4D (Quaternionen):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae - bf - cg - dh \\ af + be + ch - dg \\ ag - bh + ce + df \\ ah + bg - cf + de \end{pmatrix}$$

Eine graphische Vorstellung ist hier schwer zu entwickeln (da im vierdimensionalen Raum). Jedoch spielt dieses Vektorprodukt eine große Rolle in der Computergrafik zur Definition von Drehmatrizen (ähnlich wie das 2D-Vektorprodukt) und in der Physik, da man mit Hilfe dieser 4-dimensionalen Produkte darstellen kann, wie sich der Spinzustand von Elektronen verhält.