AFFINE UND LINEARE ABBILDUNGEN

Mathematik-II

Eigenschaften affiner Abbildungen

Affine Abbildungen kennen Sie aus der Schule (Verschiebung, Drehung, Normalprojektion, Scherung, Spiegelungen an Punkten, an Geraden und an Ebenen, Skalierung von Figuren…). Die Gemeinsamkeit (die Definiton) von affinen Abbildungen ist:

- Sie sind streckentreu (was vor der Abbildung eine Strecke war, bleibt auch nach der Abbildung eine Strecke
- Sie sind verhältnistreu (teilt ein Punkt eine Strecke in zwei Abschnitte, so bleibt das Teilungsverhältnis nach der Abbildung bestehen)
- Sie sind parallelentreu (eine Konsequenz der anderen beiden Eigenschaften; bildet man zwei parallele Geraden ab, dann sind auch deren Bildgeraden parallel zueinander)

Eigenschaften linearer Abbildungen

Lineare Abbildungen sind spezielle affine Abbildungen; nämlich solche, die den Ursprung des Koordinatensystems als Fixpunkt haben.

Beispiele: Drehung um den Ursprung, Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, Projektion auf eine Ebene, die den Ursprung enthält…

Nicht-linear ist die „Verschiebung“. Diese affine Abbildung hat keinen Fixpunkt.

Lineare Abbildung "A": Algebraische Definition

Nehmen wir an, wir haben eine Strecke zwischen den beiden Endpunkten v und w (beides Vektoren, „Pfeile, die auf einen Punkt im n-dimensionalen Raum zeigen"). Dann bedeutet Streckentreue, dass die Strecke zwischen v und w auf eine Strecke zwischen den Endpunkten Av und Aw abgebildet wird (das sind die Bilder der beiden Punkte). Verhältnistreu bedeutet, dass ein Punkt der Strecke, der durch die Gleichung $p = \alpha v + \beta w$ gegeben ist, wobei α, β nicht-negative reelle Zahlen sind, die in Summe 1 ergeben (die Teilungsverhältnisse), abgebildet wird auf

$$Ap = \alpha\, Av + \beta\, Aw + s,$$

wobei s irgendein konstanter Verschiebungsvektor ist. Da aber bei einer linearen Abbildung der Ursprung ein Fixpunkt ist, ist s in diesem Falle Null. Die algebraische Definition einer linearen Abbildung ist demnach: $A(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, Av + \beta\, Aw$.

Lineare Abbildung ist durch Basisbilder bestimmt

Nehmen wir an, wir wollten das Bild eines beliebigen Vektors unter einer linearen Abbildung bestimmen, z.B.

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Dann wissen wir, was diese Tupelschreibweise bedeuet, nämlich 1mal der erste Basisvektor + 2mal der zweite + 1mal der dritte:

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = A(1e_1 + 2e_2 + 1e_3) = 1Ae_1 + 2Ae_2 + 1Ae_3.$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Linearität von A. Das bedeutet aber, das das Bild eines beliebigen Vektor bereits eindeutig durch das Bild der Basisvektoren bestimmt ist.

Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Matrix

Wenn man die Bilder der Basisvektoren kennt, dann kann man eine lineare Abbildung durch eine sogenannte Matrix darstellen, z.B:

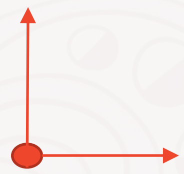
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Spalten dieser Matrix gerade eben die Bilder der Basisvektoren (z.B. die Bilder der Einheitsrichtungen im Koordinatensystem) des Vektorraumes. Und die Abbildung wird als Multiplikation geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

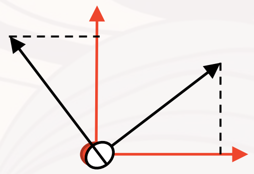
Darstellende Matrix finden

Möchte man z.B. die 2D-Rotation um einen Punkt um einen Winkel θ darstellen in Form einer Matrix, dann muss man zunächst gewährleisten, dass der Ursprung des Koordinatensystems ein Fixpunkt der Abbildung ist. In diesem Falle ist das Drehzentrum also als Ursprung zu wählen. Jetzt muss man noch die Basisvektoren bestimmen. Da kann man einfach zwei orthogonale Vektoren nehmen, die vom Ursprung ausgehen:



Darstellende Matrix finden

Um die Matrix zu finden, muss man lediglich die Bilder der Basisvektoren bestimmen. Man dreht also beide Vektoren jetzt um den Winkel θ:



Wer jetzt Geometrie kann, sieht, dass sich die schwarzen Pfeile als gewichtete Summe (Linearkombination) der beiden roten Pfeile darstellen lassen, und zwar mit den Koordinaten:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$