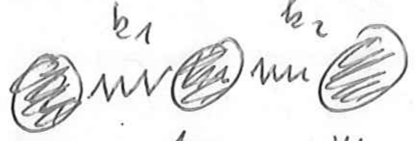
Normalschwingungen (beliebt: Molekül zum Schwingen bringen)



m_1 $\quad m_2$ $\quad m_3$

x_1 $\quad x_2$ $\quad x_3$

Auslenkung aus Ruhelage (später erklärt)

$m\ddot{x} = -kx$ 1-dim

z.B. $m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2)$

Sir Isaac Newton 1687

$$\boxed{\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 & 0 \\ k_1 & -k_1-k_2 & k_2 \\ 0 & k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{3-dim}}$$

$M\ddot{x} = Ax$ als Matrix geschrieben **2. ORDNUNG**

Ansatz: $\vec{x}_i(t) = \vec{d}_i \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}_i(t) = \alpha^2 \cdot \vec{d}_i \cdot e^{\alpha t}$

$$M\ddot{x} = Ax \Rightarrow M(\alpha^2 d e^{\alpha t}) = A d e^{\alpha t}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 d e^{\alpha t} = M^{-1} A d e^{\alpha t}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 d = (M^{-1}A) \cdot d$$

Bedeutung: d sind Eigenvektoren von $\underbrace{M^{-1}A}_{=B}$ zu den Eigenwerten α^2 (erste Ordn.: analog)

Beispiel: $k_1 = k_2 = 1$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$\lambda d = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} d \quad , \qquad \alpha^2 = \lambda$

Eigenwerte & Eigenvektoren berechnen

$\alpha_1^2 = \lambda_1 = 0 \qquad d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \qquad \qquad \alpha_3^2 = \lambda_3 = -3$

$\alpha_2^2 = \lambda_2 = -1 \qquad d_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \qquad \qquad d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s$

<u>VIDEO</u>: Ruhelage und Auslenkung erklären, Frequenz zeigen

---

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \pm i$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\mu_2 \cdot e^{it} + \bar{\mu}_2 e^{-it} \right)$$

berechnen

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\beta_2 \cdot \cos(t) + \delta_2 \sin(t) \right)$$

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow \alpha_3 = \pm i \cdot \sqrt{3}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\beta_3 \cos(\sqrt{3} t) + \delta_3 \sin(\sqrt{3} t) \right)$$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \qquad \rightsquigarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}$ konstant $\Rightarrow x$ linear

Gradlinige Bewegung

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\beta_1 \cdot t + \delta_1 \right)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\beta_2 \cos(t) + \delta_2 \sin(t) \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\beta_3 \cos(\sqrt{3}t) + \delta_3 \sin(\sqrt{3}t) \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\beta_1 t + \delta_1 \right)$$

VIDEO

Frequenzen und Normalschwingungen erklären

Verfahren funktioniert, da $M^{-1}A$ diagonalisierbar

PRINZIP

$$Ay = \ddot{y} \qquad X \Lambda X^{-1} y = \ddot{y} \qquad \leftarrow \text{1. ORDNUNG}$$

$$X^{-1} A X = \Lambda$$
$$BX = X\Lambda$$

$$\Lambda X^{-1} y = X^{-1} \ddot{y}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z = X^{-1} y \\ \text{bzw.} \\ Xz = y \end{array}}$$

$$\Lambda z = \ddot{z} \xrightarrow{z} e^{\sqrt{\lambda} t} \xrightarrow{y} \text{multipliziert mit } X$$

(Reaktionskinetik)

$\boxed{\text{1. ORDNUNG}}$ zeigen!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2,3} = 4 \qquad X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{4t}$$

$\boxed{By = \dot{y}}$

Lösung ja, aber nicht allgemeine Lösung!

Eigenvektoren ausrechnen von B geht durch

$\ker(B - \lambda I) \rightarrow$ Eigenraum

jeder Vektor v, der mit $(B-\lambda I)$ multipliziert 0 ergibt ist auch Kern von $\underbrace{(B-\lambda I)\cdot(B-\lambda I)}_{(B-\lambda I)^2} v = 0$

$\ker(B-\lambda I)^r \rightarrow$ Haupträume

Hauptvektoren von A: $\overset{r=1}{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}}, \overset{r=2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{r=3}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}} \Longrightarrow X$

$$X^{-1} A X = \Lambda = \begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 15\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Marie Ennemond Camille Jordan 1870

$$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&15\\0&0&0\end{pmatrix}$$

← „nilpotent" erklären

$$\Lambda = D + N$$

Entscheidend ist: $D \cdot N = N \cdot D$ & N nilpotent

Lösung von: $\Lambda z = \dot{z}$ ist $e^{\Lambda \cdot t}\vec{z}_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Lambda^i \cdot t^i}{i!}\right)\vec{z}_0 = \left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right)\vec{z}_0$

$$z = e^{\Lambda t}\vec{\beta} = e^{(D+N)t}\vec{\beta} = e^{Dt}\cdot e^{Nt}\vec{\beta} = e^{4t}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&15\\0&0&0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0&0&-30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}t^2\right)\cdot\vec{\beta}$$

insgesamt

$$y = X \cdot Z \cdot = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{X} \cdot \underbrace{e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & -2t & -30t^2 \\ 0 & 1 & 15t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Z} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\beta}}$$

$$= e^{4t} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 - 2\beta_2 t - 30\beta_3 t^2 \\ \beta_2 + 15\beta_3 t \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$= e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} -2\beta_1 + 4\beta_2 t + 60\beta_3 t^2 + \beta_3 \\ \beta_2 + 15\beta_3 t \\ \beta_1 - 2\beta_2 t - 30\beta_3 t^2 + 2\beta_3 \end{pmatrix}$$