Definitionen-Zettel Nr. 11

Lernziel: Basis und Dimension eines Vektorraumes.

Definition 11.1: Unter einer **Linearkombination** $\text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ der Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ eines Vektorraumes V über einem Körper K versteht man alle Vektoren $a \in V$ der Form $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ mit sogenannten **Linearfaktoren** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$.

Die Linearkombination von Vektoren ergibt wieder einen Vektorraum (einen Untervektorraum zu V).

Definition 11.2: Die Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ heißen **Erzeugendensystem** des Vektorraumes $W = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definition 11.3: Die Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ aus einem K -Vektorraum V heißen **linear unabhängig**, wenn aus $0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Definition 11.4: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines K -Vektorraumes W heißt **Basis** von W .

Ein Vektorraum kann verschiedene Basen haben, aber die Anzahl der Basiselemente ist immer gleich.

Definition 11.5: Die Anzahl der Vektoren einer Basis von W heißt **Dimension** des Vektorraumes W .

Jedes Element w eines Vektorraumes W lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben: $w = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$. Ist die Basis bekannt, dann

schreibt man für w auch einfach die Linearfaktoren in der Form $w = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und nennt

sie die **Koordinaten von w bezüglich der Basis** $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$.

Bisher haben wir $\mathbb{R}^n$ immer als ein spezielles Beispiel für einen Vektorraum betrachtet. Nach dem hier gesagten wird jedoch klar, dass alle endlichen $\mathbb{R}$ -Vektorräume auf diese Weise dargestellt werden können, wenn man sich auf eine Basis einigt...