FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Definitionen-Zettel Nr. 12

Lernziel: Einen Basiswechsel durchführen.

Ein Beispiel: Polynome die (höchstens) den Grad n haben, bilden einen (n+1)-dimensionalen Vektorraum. Beispiel sind die Polynome vom maximalen Grad 3

$$a = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Bezüglich der sogenannten „Monombasis“ (x^3, x^2, x,1) lässt sich so ein Polynom daher als Vektor schreiben:

$$a = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}_M .$$

Der Index M soll hier für „Monombasis“ stehen. In der Numerischen Mathematik wird man lernen, dass die Monombasis manchmal keine schönen Eigenschaften für die Stabilität von numerischen Algorithmen hat. Man stellt das Polynom lieber in der sogenannten Tschebyschow-Polynombasis

$$a = b_3(4x^3 - 3x) + b_2(2x^2 - 1) + b_1x + b_0$$

mit geeigneten Koeffizienten b_3, b_2, b_1, b_0 dar. Bezüglich der Tschebyschow-Polynombasis hat a also die folgende Vektornotation:

$$a = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}_P .$$

Der Index P soll hier für diese Basis stehen. Um jetzt bei gegebener Darstellung in Tschebyschow-Polynombasis auf die Darstellung in Monombasis zu transformieren, gibt es eine **Transformationsmatrix T_M^P des Basiswechsels von P nach M** mit

$$T_M^P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man diese Matrix mit a in der P-Basis, so erhält man a in der M-Basis.