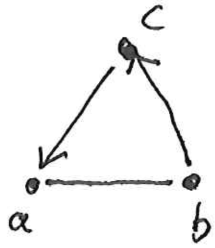
Beweisskizze:

Zunächst wird gezeigt, dass ein Dreieck Δabc genau dann gleichseitig ist, wenn

$$a + \omega b + \omega^2 c = 0$$

mit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (= Drehung um 120°)

Idee:



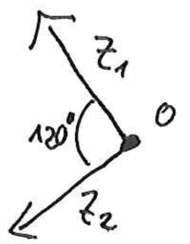
was ist der „Zeiger", der b auf c schiebt?

$$c = b + z_1$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = c - b}$$

Genauso: Zeiger, der c auf a schiebt

$$\boxed{z_2 = a - c}$$



Der Winkel zwischen diesen Zeigern beträgt 120° (am Ursprung aufhängen!) im gleichseitigen Dreieck.

Aber im gleichseitigen Dreieck geht z_2 durch Drehung um 120° aus z_1 hervor (gleich lang):

$$z_2 = z_1 \cdot \omega$$

$$\Leftrightarrow (c-b)\omega = a - c$$

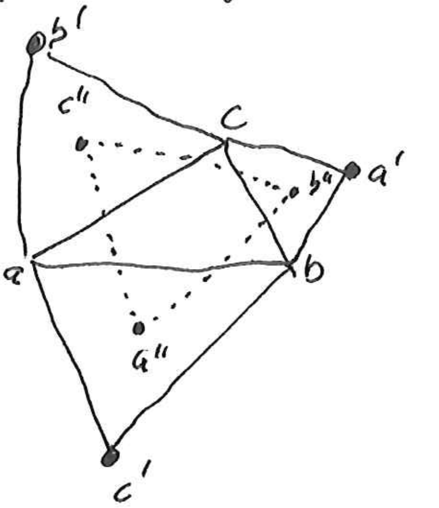
$$\Leftrightarrow c(\omega+1) - b\omega - a = 0$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 c - \omega b - a = 0$$

N.R.
$-(\omega+1) = \omega^2$

q.e.d.

[Nun zeigen wir den Satz von Napoléon]



$$3(a''+b''\omega+c''\omega^2)$$

$$=3\cdot\Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}(a+c'+b)}_{\text{so wird der Schwerpunkt errechnet}}+\tfrac{\omega}{3}(b+a'+c)+\tfrac{\omega^2}{3}(c+b'+a)\Big)$$

$$= a+c'+b+\omega b+a'\omega+\omega c+c\omega^2+b'\omega^2+a\omega^2$$

umsortiert $$= \underbrace{(a+\omega b+\omega^2 c)}_{\text{gleichs.}}+\underbrace{(c'+b\omega+a\omega^2)}_{\text{gleichs.}}+\underbrace{(b+a'\omega+c\omega^2)}_{\text{gleichs.}}$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

$\Rightarrow a'', b'', c''$ gleichseitig q.e.d.