

Definitionen-Zettel Nr. 3

Lernziel: Beweistechniken und Beweisorganisation.

Beweistechniken

Definition 3.1: Unter einem **direkten Beweis** einer Aussage B oder der Aussage $A \Rightarrow B$ versteht man eine Abfolge/Beweiskette von wahren Implikationen, die mit der Aussage A beginnt und mit der Aussage B endet. Will man die Aussage B beweisen, muss man dabei zusätzlich zeigen, dass die Aussage A wahr ist.

Definition 3.2: Unter einem **Beweis durch Kontraposition** einer Aussage $A \Rightarrow B$ versteht man eine Abfolge von wahren Implikationen, die mit der negierten Aussage $\bar{B}$ beginnt und mit der negierten Aussage $\bar{A}$ endet.

Definition 3.3: Unter einem **Beweis durch Widerspruch** einer Aussage A versteht man eine Abfolge von wahren Implikationen, die mit der negierten Aussage $\bar{A}$ beginnt und mit der Aussage B endet. Von der Aussage B zeigt man, dass diese falsch ist.

Definition 3.4: Die Beweise durch Kontraposition und die Beweise durch Widerspruch heißen auch **indirekte Beweise**.

Beweisorganisation

Definition 3.5: Bei einem **Ringbeweis** zeigt man die Äquivalenz der Aussagen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, indem man die Aussagen $A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots, A_{n-1} \Rightarrow A_n$ beweist und zusätzlich $A_n \Rightarrow A_1$ zeigt (mit einer der obigen Techniken).

Definition 3.6: Bei einem **Beweis durch vollständige Induktion** zeigt man die Gültigkeit der Aussagen $A_1, A_2, A_3, \dots$, indem man zunächst die Aussage A_1 beweist und dann zeigt, dass für alle i gilt: $A_i \Rightarrow A_{i+1}$.

Es gibt jedoch auch (in komplizierten Fällen) Varianten der vollständigen Induktion. Genau genommen: Die Aussage A_{i+1} muss nicht aus der direkt „vorangehenden“ Aussage bewiesen werden, sondern man kann annehmen, dass alle vorangehenden Aussagen wahr sind. So kann z.B. alternativ für jedes i gezeigt werden, dass es ein $j \leq i$ gibt, mit $A_j \Rightarrow A_{i+1}$.

Definition 3.7: Bei einem **Beweis durch reductio-ad-absurdum** zeigt man die Gültigkeit der Aussage $\bar{A}_1$ indem man zunächst wie bei der vollständigen Induktion beweist (mit einer der obigen Techniken), dass für alle i gilt: $A_i \Rightarrow A_{i+1}$. Dann macht man sich klar, dass es ein k (oft ohne zu wissen welches) gibt, für das A_k falsch ist.

Häufig in der (linearen) Algebra verwendete Beweistricks

Trick 1: Gleichheit (Äquivalenz), z.B. $a=b$, wird häufig in zwei Schritten bewiesen. Man zeigt $a \leq b$ und $a \geq b$. Das funktioniert auch bei Mengen $A=B$, indem man $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zeigt.

Trick 2: Dass zwei endliche Mengen gleichmächtig sind, zeigt man durch eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen. Das ist im Prinzip wieder Trick 1. Mit einer surjektiven Abbildung von A nach B zeigt man, dass A mindestens so viele Elemente wie B umfasst und mit einer injektiven Abbildung zwischen A und B zeigt man, dass B mindestens so viele Elemente wie A enthält.

Trick 3: Das „Multiplizieren mit Eins“ oder das „Addieren von Null“ sind sehr oft verwendete Tricks. Ein (Formel)Ausdruck ändert seinen Wert nicht, wenn man z.B. den Term $\dots + a - a$ einschiebt oder $\dots aa^{-1}$ und dann die Klammerung in der Formel umsetzt.

Trick 4: Strukturerhaltende Abbildungen vererben Eigenschaften. Hat man eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ gefunden, die die Ordnung der Elemente erhält, indem z.B. $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, oder die die algebraische Struktur erhält, indem z.B. $a + b = c \Rightarrow f(a) + f(b) = f(c)$, so kann man (Struktur)Aussagen über die Menge B auch in der Menge A beweisen.