FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Definitionen-Zettel Nr. 10

Lernziel: Bild und Kern einer Matrix. Lösbarkeitsbedingung. Spezielle und allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dimensionsformel.

Die Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ergibt einen Vektor $y = Ax \in \mathbb{R}^m$. Die Matrixmultiplikation lässt sich also als Funktion $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auffassen.

Definition 10.1: Das **Bild** $im\ A$ **einer Matrix A** ist definiert als Bild der Abbildung f_A.

Insbesondere lässt sich ein lineares Gleichungssystem Ax=b, mit der Unbekannten $x \in \mathbb{R}^n$, der gegebenen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ und gegebener rechter Seite $b \in \mathbb{R}^m$ genau dann nach x lösen, wenn $b \in im\ A$.

Definition 10.2: Der **Kern einer Matrix** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(\mathbf{m} \times \mathbf{n})}$ ist definiert als die Teilmenge $\ker A = \ker f_A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\ker f_A := \{ x \in \mathbb{R}^n : f_A(x) = 0\}$, wobei in dieser Definition das Symbol 0 die „mehrdimensionale" 0 aus $\mathbb{R}^m$ ist.

Nachrechnen (mittels Distributivgesetz) zeigt, dass die Matrixmultiplikation eine lineare Abbildung ist:

Definition 10.3: Eine **lineare Abbildung** $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ zwischen zwei K-Vektorräumen V und W ist eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(\lambda a + \mu b) = \lambda\, f(a) + \mu\, f(b)$, für alle $\lambda, \mu \in K$ und $a, b \in V$. Eine solche Abbildung heißt auch **Homomorphismus**.

Für eine **(spezielle) Lösung** $x \in \mathbb{R}^n$, $f_A(x) = b$, des linearen Gleichungssystems Ax=b, mit gegebener Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ und gegebener rechter Seite $b \in \mathbb{R}^m$, sowie $a \in \ker A$, gilt also: $f_A(x + a) = f_A(x) + f_A(a) = f_A(x) = b$. Daher ist auch jeder Vektor $\tilde{x} = x + a$, wobei a alle Elemente von $\ker A$ durchläuft, auch eine Lösung des Gleichungssystems. Man spricht von der **allgemeinen Lösung** $x + \ker A$ des linearen Gleichungssystems. Insbesondere lässt sich ein Gleichungssystem eindeutig lösen, wenn es eine Lösung gibt ($b \in im\ A$) und $\ker A = \{0\}$, wobei das Symbol 0 für die „mehrdimensionale" 0 aus $\mathbb{R}^n$ steht.

Bild-Kern-Algorithmus: Um Bild und Kern einer (m x n)-Matrix A zu bestimmen, führt man Elementarumformungen (ähnlich wie bei Gauß aber) auf den Spalten der Matrix durch - mit dem Ziel, eine linke untere Dreiecksmatrix zu erhalten. Die gleichen Umformungen führt man parallel mit einer (n x n)-Einheitsmatrix durch. Zum Beipiel:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\4 & 5 & 6 & -2\\7 & 8 & 9 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\4 & -3 & -6 & -6\\7 & -6 & -12 & -6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\4 & -3 & 0 & 0\\7 & -6 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\0 & 1 & -2 & -2\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ein Spalten-Vertauschen (Pivoting) kann auch hier manchmal nötig werden:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\4 & -3 & 0 & 0\\7 & -6 & 6 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Alle Nicht-Null-Spalten in der umgeformten Matrix A‘ (links) stellen eine „Basis“ für das Bild von A dar. Die Null-Spalten in der umgeformten Matrix A‘ stehen jeweils für einen „Basisvektor“ des Kerns von A. Die entsprechenden „Basisvektoren“ findet man in der umgeformten Einheitsmatrix (rechts).

Also das Bild von A ist gegeben durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ und der Kern ist gegeben durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$. **Dimensionsformel:** *Addiert man die „Dimension“ vom Bild von A zu der „Dimension“ vom Kern von A, so erhält man also n (die Anzahl der A-Spalten).* [Dieser Satz erhält eine Bedeutung, wenn die Begriffe „Basis“ und „Dimension“ genau erklärt werden.]