FU Berlin: WiSe 2015/16 (Mathematik 2, Weber)

Zusatz zu Übungszettel Nr. 4

Lernziele: Bild-Kern-Algorithmus und allg. Lösung linearer Gleichungssysteme

---

Bild und Kern einer Matrix

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor lässt sich auffassen als Linearkomination der Spalten der Matrix. Nehmen wir z.B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Vektor-Multiplikation lässt sich folgendermaßen verstehen:

$$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das *Bild der Matrix* A sind dabei alle 3-dimensionalen Vektoren, die auf der rechten Seite dieser Gleichung entstehen können, wenn man x entsprechend wählt. Wir werden sehen, dass dieses in diesem Beispiel nur eine eingeschränkte Auswahl von 3-dimensionalen Vektoren ist. Der *Kern der Matrix* sind alle 4-dimensionalen x-Vektoren, die bei Multiplikation mit A den Null-Vektor ergeben.

Bild und Kern einer Matrix bestimmen

Man macht sich zunächst klar, dass sich das Bild der Matrix nicht ändert, wenn man das Vielfache anderer Spalten zu einer Spalte von A hinzuaddiert. Daher kann man Spaltenumformungen durchführen, die die Matrix auf eine Stufenform bringen. (Jetzt der Trick, der nachher wichtig wird: Die gleichen Umformungen führt man an einer quadratischen Einheitsmatrix durch, die genauso viele Spalten wie A hat).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst addiert man das (-2)-fache der ersten Spalte zur zweiten.

$$\begin{pmatrix} 1 & {\color{red}0} & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise entsteht eine Null in der ersten Zeile. Mit der gleichen Methode werden auch die anderen Elemente (rechts davon) der ersten Zeile Null.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun nimmt man den zweiten Spaltenvektor. Mit seiner Hilfe lassen sich Nullen (rechts davon) in der zweiten Zeile erzeugen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist man schon fertig. Alle Einträge rechts von der zweiten Spalte sind bereits Null. Jetzt kann man das Bild und den Kern der ursprünglichen Matrix A ablesen. Alle Nicht-Null-Spalten auf der transformierten Matrix bilden das Bild der Matrix:

$$Bild(A) = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch die "Struktur der Nulleinträge" ist sichergestellt, dass die Vektoren nicht linear abhängig sein können. Den Kern der Matrix kann man auf der rechten Seite ablesen. Die letzten beiden Spaltenvektoren von der modifizierten A-Matrix sind komplett Null. Daher sind die letzten beiden Spalten der rechten Matrix der Kern der Matrix:

$$Kern(A) = y_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht prüfen, dass diese Vektoren bei Multiplikation mit A Null ergeben.

Allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems

Nun wollen wir für ein gegebenen Vektor b alle Vektoren x finden, so dass $Ax = b$. Z.B.

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass die Gleichung genau dann lösbar ist, wenn b im Bild von A enthalten ist. Es muss also gelten:

$$y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch die Struktur der Nulleinträge lässt sich leicht bestimmen, ob es ein solches Paar y_1, y_2 gibt. Schaut man sich die erste Komponente der Vektoren an, so wird klar, dass $y_1 = 1$ gelten muss. Aus der zweiten Komponente ergibt sich damit $y_2 = 1$. Das passt auch mit der dritten Komponente.

Um von y auf x zu schließen, muss man einfach die umgeformte Einheitsmatrix mit y multiplizieren (dabei sind y_3 und y_4 beliebig):

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

So sieht die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung aus. Von der Struktur her:

$$x = spez. Lösung + Kern(A)$$