Grenzwerte kann man häufig einfach durch Einsetzen ausrechnen

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+4} = \cos\left(\frac{1}{\infty}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{\infty}+4}$$

$\frac{1}{x}$ geht für $x\to\infty$ nach 0

$$= \cos(0)\cdot\sqrt{4} = 2$$

Manchmal muss man die Terme erst etwas umformen, um die $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n^2}$ ... zu finden.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{\sqrt{n^6+4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{4}{n^6}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(2+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\sqrt{1+\frac{4}{n^6}}} = 2$$

n^{3} ist höchster Exponent

$\to 0$

Manchmal hilft nur argumentieren

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\cos(n)\cdot\frac{1}{1+n^2} = 0$$

beschränkt

Nullfolge

Bei rekursiv definierten Folgen kann man ausnutzen, dass a_n und a_{n+1} den gleichen Grenzwert haben müssen

z.B. $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 2}$

D.h. wenn es einen Grenzwert a gibt, dann muss gelten

$$a = \frac{1}{a+2}$$

also $a^2 + 2a = 1$ oder $a^2 + 2a - 1 = 0$

$$a_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = \underbrace{-1 \pm \sqrt{2}}_{\text{das sind die möglichen (!) Grenzwerte}}$$

Über Konvergenz ist nichts gesagt.

Typische Klausuraufgaben könnten auch darin bestehen, für gegebene Rekursionen (Fixpunktiterationen) zu prüfen, ob ein Fixpunkt existiert, eindeutig ist, wie schnell erreicht wird.
Dazu muss man jeweils die Bedingungen der gelernten Sätze prüfen.

---

z.B.
Hat die Funktion $\phi(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $[-1;1]$ einen Fixpunkt?
Antwort: Ja, denn der Wertebereich (Output) der Funktion $\phi(x) = \cos(x)$ ist $[-1;1]$.
Also $\phi: [-1;1] \to [-1;1]$ und daher gibt es einen Fixpunkt. (das Quadrat-Argument)

---

z.B. Ist dieser Fixpunkt eindeutig?
Antwort: Ja, denn die Ableitung von ϕ ist $-\sin(x)$. Und $-\sin(x)$ ist nirgendwo 1 im Intervall $[-1;1]$. (Rückkehr-zur-Winkelhalbierenden-Argument)

Bei Aufgaben, die den Fixpunktsatz von Banach betreffen, müssen Sie die gegebenen Werte einfach in die a-priori- oder die a-posteriori-Fehlerschätzung eintragen und umformen.

Beispiel: Siehe Lösung zur Aufg. 4!