FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „Cramersche Regel“

Lernziel: Ein quadratisches(!!) LGS mit vollem Rang(!!) durch eine „Formel“ lösen. Hilfsmittel: Determinanten. Regel von Sarrus.

Zu lösen sei das folgende (reellwertige) LGS:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die „Eindeutigkeit der Lösung“ des LGS Ax=b zu ermitteln (äquivalente Fragen: Koeffizientenmatrix A hat vollen Rang? Koeffizientenmatrix A ist invertierbar? Spalten/Zeilen von A sind linear unabhängig?), berechnet man zunächst die Determinante det(A). Im Falle einer 3x3-Matrix kann man z.B. die Regel von Sarrus anwenden (Hauptdiagonalen-Produkte addieren, Nebendiagonale-Produkte abziehen):

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ -3 & 5 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 3 \cdot 8 \cdot (-9) + 3 \cdot 7 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 \cdot 5 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) - 3 \cdot 6 \cdot (-9) - 3 \cdot 7 \cdot 5 = -6$$

Genau dann, wenn det(A) nicht Null ist (wie in diesem Beispiel), ist das System eindeutig lösbar. In diesem Fall berechnet man nun die Determinanten, die entstehen, wenn man die einzelnen Spalten von A durch die rechte Seite des LGS ersetzt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix} = -118$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & -9 \end{pmatrix} = 36$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 60$$

Die Lösung des LGS ergibt sich aus den Quotienten dieser Zahlen und det(A):

$$x_1 = \frac{-118}{-6} = \frac{59}{3}, \qquad x_2 = \frac{36}{-6} = -6, \qquad x_3 = \frac{60}{-6} = -10$$