Definitionen-Zettel Nr. 14

Lernziel: Determinanten.

Neben den Linearformen (siehe Dualräume auf dem 10. Übungszettel) und den Bilinearformen (siehe allgemeine Definition des Skalarproduktes) gibt es auch noch Multilinearformen in der Algebra, z.B. die Determinanten. Allgemein gilt: „Eine n-Linearform ist eine Abbildung, die in n Komponenten linear ist“.

Definition 14.1: Die **Determinante** $\det(A)$ oder $|A|$ einer quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$, wobei K ein Körper ist, ist definiert als eine „normierte alternierende Multilinearform“, also als eine Abbildung $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$, mit

(i) (multilinear, Linearität in jeder Spalte)

$$\det(a_1, \dots, \lambda a_i + \mu b_i, \dots, a_n) = \lambda \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mu \det(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n),$$

wobei $a_1, \dots, a_n$ die Spalten der quadratischen Matrix sind.

(ii) (alternierend) Bei Gleichheit zweier Spalten in A gilt $\det(A) = 0$.

(ii) (normiert) $\det(E) = 1$, wobei E die Einheitsmatrix ist

Eine wichtige Erkenntnis der Linearen Algebra ist es, dass es zu jeder quadratischen Matrix eine Determinante mit den obigen Eigenschaften gibt (Existenz) und dass der Wert der Determinante eindeutig durch die obigen Eigenschaften festgelegt ist (Eindeutigkeit). Der Betrag der Determinante einer Matrix entspricht dem Volumen des Parallelepipeds, das von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird.

Es gibt drei (allgemeine) Möglichkeiten, eine Determinante zu berechnen.

1) Spaltentransformationen

Indem man jeweils geeignete skalare Vielfache einer Spalte der Matrix zu anderen Spalten addiert, ändert sich der Wert der Determinante nicht (Gauß-Umformungen auf den Spalten, wie im Bild-Kern-Algorithmus). Auf diese Weise kann man die Matrix auf Dreiecksgestalt bringen. Der Wert der Determinante entspricht dem Produkt der Diagonalelemente dieser Dreiecksmatrix.

2) Laplacescher Entwicklungssatz

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann man die Determinante einer $n \times n$ -Matrix „nach einer Zeile oder Spalte entwickeln“. Dieses entspricht einem rekursiven Ansatz.

Die beiden Formeln lauten

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte})$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile})$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht. Das Produkt $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ wird Kofaktor genannt. Genau genommen gibt der Entwicklungssatz nur ein Verfahren an, die Summanden der Leibniz-Formel in einer bestimmten Reihenfolge zu berechnen. Dabei wird die Determinante bei jeder Anwendung um eine Dimension reduziert. Falls gewünscht, kann das Verfahren so lange angewandt werden, bis sich ein Skalar ergibt. Ein Beispiel ist

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$

(Entwicklung nach der ersten Zeile)

3) Leibniz-Formel

Zunächst schreibt man alle möglichen Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ auf und merkt sich für jede Permutation p , wie viele einzelne Vertauschungen nötig sind, um von der „geordneten“ Reihenfolge $(1, \dots, n)$ zu p zu gelangen. Ist es eine gerade Anzahl, dann ist $\text{sgn}(p)=1$, sonst ist $\text{sgn}(p)=-1$. Man summiert nun über alle Permutationen p die Produkte $\text{sgn}(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}$ auf, wobei $p(i)$ der i -te Index in der permutierten Zahlenfolge ist.

Für weitere Rechenregeln zu den Determinanten sei auf die Literatur verwiesen und insbesondere auf:

http://www.tu-ilmeneu.de/fileadmin/media/num/neundorf/Dokumente/Lehre/hm/Determinante_Rechenregeln.pdf