FU Berlin: SoSe 2015 (Mathematik 1, Weber)

Gruppe und Körper

Lernziel: Definition der Begriffe "Gruppe" und "Körper".

Definition: Eine **Gruppe G** ist eine Menge mit einer Verknüpfung "$\circ$", für die folgende Eigenschaften gelten:

(G1) Die Gruppe ist **abgeschlossen** bezüglich der Verknüpfung, d.h. für alle Elemente der Gruppe $a, b \in G$ gilt, dass auch deren Verknüpfung wieder in der Gruppe liegt, also $a \circ b \in G$. Beispiel "Ganze Zahlen": 1+4=5 (auch 5 ist wieder eine ganze Zahl)

(G2) Die Verknüpfung ist **assoziativ**: Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge man die Verknüpfungen durchführt. Für je drei Elemente der Gruppe $a, b, c \in G$ gilt, dass $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Man kann die Klammern auch weglassen, wie bei den ganzen Zahlen: $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 1 + 2 + 3$.

(G3) Es existiert ein **neutrales Element** der Gruppe $e \in G$, für dieses Element und jedes weitere $a \in G$ gilt, dass $a \circ e = a$. Beispiel "Ganze Zahlen": Für die "0" gilt $a + 0 = a$. Bei den rationalen Zahlen gilt für die "1", dass $a \cdot 1 = a$.

(G4) Jedes Element der Gruppe $a \in G$ besitzt ein **inverses Element** $\acute{a} \in G$, so dass $a \circ \acute{a} = e$.
Beispiel "Ganze Zahlen": $-a$ ist das inverse Element bezüglich der Addition zu a, denn $a + (-a) = 0$. Bei der Multiplikation und den rationalen Zahlen gilt, a^{-1} ist invers zu a, denn $a \cdot a^{-1} = 1$.

Gilt zusätzlich das Kommutativgesetz, also $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, dann heißt die Gruppe auch **abelsch.**

Definition: Ein **Körper K** ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für die folgende Eigenschaften gelten:

(K1) Die Menge K ist hinsichtlich der **Addition** " $+$ " eine abelsche Gruppe.

(K2) Die Menge K mit Ausnahme der Null (dem neutralen Element der Addition) bildet hinsichtlich der **Multiplikation** " $\cdot$ " eine abelsche Gruppe. (Die Null hat kein inverses Element hinsichtlich der Multiplikation, da $a \cdot 0 = 0$)

(K3) Es gilt das **Distributivgesetz**. Für alle $a, b, c \in G$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.