

Hausaufgabe 9: „Primzahlen“

Aufgabe:

Wir betrachten die Menge $M := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- (1) Zeige, dass Addition und Multiplikation zweier Zahlen aus M wieder eine Zahl aus M liefern. (Wir sagen, $(M, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.)
- (2) Definiere die Norm einer Zahl $a + b\sqrt{-5} \in M$ als $\|a + b\sqrt{-5}\| := a^2 + 5b^2$. Zeige, dass für $z_1, z_2 \in M$ die Identität $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$ gilt.
- (3) Wenn $z \in M$ Norm 1 hat, muss $z = \pm 1$ sein. Folgere, dass sich 2 sich nur trivial in Faktoren aus M zerlegen lässt: Wenn $2 = z_1 \cdot z_2$ mit $z_1, z_2 \in M$, dann ist einer der Faktoren ± 1 . Das heißt, 2 ist eine M -Primzahl.
- (4) Folgere analog, dass 3 eine M -Primzahl ist.
- (5) Folgere analog, dass $1 \pm \sqrt{-5}$ auch M -Primzahlen sind.
- (6) Wie kann man 6 in Faktoren aus M zerlegen?

Rahmenbedingungen:

Umfang: Keine explizite Vorgabe

Abgabe: Als PDF-Datei im Whiteboard hochladen.

Abgabefrist: 22.12.2021; 12.00 Uhr

Zu beachten: Ihr Name muss auf allen Seiten lesbar sein (z.B. in Kopfzeile integrieren).