FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „Hessesche Normalform und Parameterform“

Lernziel: Bei Ebenen (Hyperebenen, Geraden) zwischen der Darstellung durch die Hessesche Normalform und durch Parameter wechseln… (duale Konzepte)

Von der Hesseschen Normalform zur Parameterform:

Um eine (n-1)-dimensionale Hyperebene in einem n-dimensionalen Raum darzustellen, kann die Hessesche Normalform verwendet werden. Die Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ der Hyperebene erfüllen dabei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$a^T x = d,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist, der senkrecht auf der Ebene steht, und $d \in \mathbb{R}$ der Abstand der Ebene vom Ursprung ist, sofern a die Länge 1 hat (Normale). Löst man dieses Gleichungssystem mit dem Bild-Kern-Algorithmus, so erhält man die Parameterdarstellung der Hyperebene. Ein Beispiel: Hessesche Normalform

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 4.$$

Lösung durch den Bild-Kern-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Die „Nullspalten“ auf der linken Seite korrespondieren zu den beiden Vektoren auf der rechten Seite, die den Kern des LGS aufspannen. Eine spezielle Lösung des LGS ist $x_1 = 8,\ x_2 = 0, x_3 = 0$. Daher ist eine(!) Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Von der Parameterform zur Hesseschen Normalform:

In der Parameterform entspricht die Hyperebene einem „affinen Vektorraum“, also einem Vektorraum, der um einen Aufpunkt aus dem Ursprung verschoben wurde. Ist dieser Vektorraum (n-1)-dimensional, dann (und nur dann) kann man die entsprechende Hyperebene auch durch die Hessesche Normalform darstellen. Ein Beispiel: Die Parameterform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Zu suchen ist jetzt ein Vektor a, der senkrecht zu den beiden Vektoren aus dem Span (also senkrecht zur Ebene) steht. Ein Skalarprodukt dieses Vektors a mit den beiden aufspannenden Vektoren muss also 0 liefern. Anders: Der Kern(!) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist zu bestimmen. Dazu wendet man wiederum den Bild-Kern-Algorithmus an:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$

Der Vektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht also senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da der Aufpunkt $\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegen muss, ist $d = a^T \hat{x} = 3$. Hessesche Normalform:

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \text{ bzw. normiert: } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Dass die beiden Konzepte (Hessesche Normalform, Parameterform) dual zueinander sind, erkennt man daran, dass man jeweils den Kern einer Matrix bestimmen muss, um von der einen zu der anderen Darstellungsform zu gelangen.