bisher:

lin. Abb $\rightarrow$ Matrix

- Spalten = Bilder der Basisvektoren
- ONS $\rightarrow$ Idee von bekannten (innere Produkte, Skalarpr.)
- Orthogonalprojektion $\rightarrow$ Summe dyadischer Produkt

jetzt

Matrix $\rightarrow$ lin Abb.

$\hookrightarrow$ wichtig ~~Fixpunktgera~~
Fixgeraden durch Ursprung

Achsenspiegelung, Ebenenspiegelung, Punktspiegelung
Streckung, 3D Rotation

$A \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \; v \in \mathbb{C}^3$

$Av = v \longrightarrow Av = \lambda v$ ← Eigenvektor, λ: Eigenwert

$Av = \lambda v, v \neq 0 \iff Av = \lambda I v, v \neq 0$

$\iff (A - \lambda I) v = 0, v \neq 0$

$\iff v \in \ker(A - \lambda I), v \neq 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(-\frac{1}{9}+\lambda^2-\frac{8}{9}\right)$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$$ charakteristischer Polynom

Nullstellen = Eigenwerte

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

(2)

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{matrix}$$

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Eigenraum dim = 2

geometrische Vielfachheit

$(1-\lambda)^2 (-1-\lambda)$

algebraische Vielfachheit

$\lambda_2 = -1$ alg. VF = 1

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\cdot \cancel{\sqrt{2}}$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$v_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{geo VF} = 1$$

Erklärung der Bedeutung der Eigenvektoren

schwere Fälle

$\phi_1 = \sin(x)$ $\qquad$ lin. Abb $= \frac{d}{dx}$

$\phi_2 = \cos(x)$

$$\boxed{\text{Ableitung = Vielfach der Ausgangsfunktion?}}$$

$\phi_1' = \cos(x) = 0 \cdot \phi_1 + 1 \cdot \phi_2$

$\phi_2' = -\sin(x) = -1\, \phi_1 + 0 \cdot \phi_2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht 2D Rotation um $90°$

Fixgerade?

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$

$\lambda_1 = i \qquad \begin{matrix} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 1 \end{matrix}$ $\quad \cdot i$ $\quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha(i\sin(x) + \cos(x)) = \alpha \cdot e^{ix}$

$\lambda_2 = -i \qquad \begin{matrix} i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{matrix}$ $\quad \cdot(-i)$ $\quad v_2 = \alpha \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Scherung

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \quad \lambda_1 = 1 \quad$ alg. VF = 2

$\left.\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad v_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ geo VF = 1

---

geo $\leq$ alg. $\rightarrow$ „nicht diagonalisierbar"

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$

$AX = X\Lambda \quad$ mit $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d.h. $X^{-1}AX = \Lambda$

bei nicht-diagonalisierbaren ist Λ keine Diagonalmatrix
aber Dreiecksmatrix

$\overset{\text{alg. VF}}{\prod \lambda} = \det(\Lambda) = \det(X^{-1}AX) = \det(X^{-1})\det(A)\det(X)$

$= \det(X^{-1}X)\det(A) = \det(A)$

↑ im Rechner

hermitesche Matrizen haben reelle Eigenwerte (λ, v)

$$\lambda \langle v|v\rangle = \langle v|\lambda v\rangle = \langle v|Av\rangle$$

$$\underset{h.}{\overset{\uparrow}{=}} \langle Av|v\rangle = \langle \lambda v|v\rangle = \bar{\lambda}\langle v|v\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \text{q.e.d.}$$

---

hermitesche Matrizen: Eigenvektoren (v, w) zu verschiedenen Eigenwerten (λ_v, λ_w) stehen senkrecht zueinander

---

$$\langle Aw|v\rangle = \langle \lambda_w w|v\rangle = \bar{\lambda}_w \langle w|v\rangle = \lambda_w \langle w|v\rangle$$

$$\|$$

$$\langle w|Av\rangle = \langle w|\lambda_v v\rangle = \lambda_v \langle w, v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle w|v\rangle = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

ONS: Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix (hermiteschen Operatoren)