Herleitung des Taylor-Polynoms mit Restglied (so wie es Lagrange formuliert hat)

Zunächst erinnern wir uns an die letzte Stude, in der ich Ihnen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gezeigt hatte:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

wobei f die Ableitung von F ist. Tauscht man die "Buchstaben" aus und nutzt diese Ableitungsbeziehung, dann kann man auch äquivalent schreiben:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(r)\,dr.$$

Dieser Ausdruck ist eine "komplizierte" Weise, eine Funktion f(x) aufzuschreiben: Die Funktion an der Stelle x ist so etwas wie die Funktion an der Stelle x_0 plus dem "Zuwachs von x_0 bis x" (ausgedrückt durch ein Integral über $f'(r)$).

Nun, mit Hilfe derselben Formel kann man auch $f'(r)$ anders ausdrücken:

$$f'(r) = f'(x_0) + \int_{x_0}^{r} f''(s)\,ds.$$

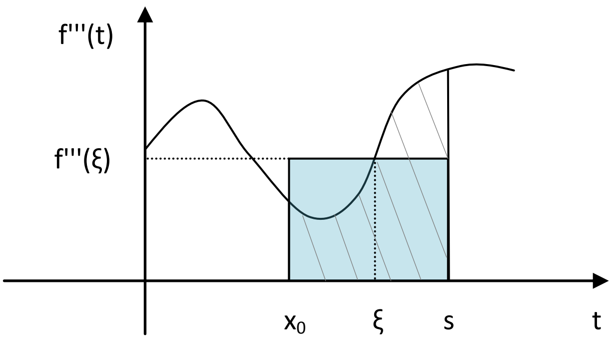
Das könnte man unendlich fortführen. So ist auch

$$f''(s) = f''(x_0) + \int_{x_0}^{s} f'''(t)\,dt.$$

Wir wollen jetzt aber mal anhalten und diese "vorwärts gerichtete" Darstellung von immer höheren Ableitungen der Funktion f "rückwärts" benutzen, um zunächst $f''(s)$ mit Hilfe der letzten Formel auszurechnen, das Ergebnis tragen wir in die vorletzte Formel ein, um $f'(r)$ auszurechnen. Das liefert wiederum einen Ausdruck für $f'(r)$, den wir in die Ausgangsformel eintragen können, um $f(x)$ zu erhalten.

Zunächst bestimmen wir das Integral: $\int_{x_0}^{s} f'''(t)\,dt$. Das folgende Bild veranschaulicht, dass wir uns das Integral denken können als $\int_{x_0}^{s} f'''(t)dt = (s - x_0)\,f'''(\xi)$, wobei $\xi \in [x_0; s]$ eine (uns aber nicht bekannte) Zahl zwischen x_0 und s ist.

Die schraffierte Fläche stellt das Integral dar. Die blaue Box ist so konstruiert, dass sie denselben Flächeninhalt hat. Sie hat die Größe $(s - x_0)\,f'''(\xi)$.



Tragen wir dieses Resultat in die letzte Formel ein, dann erhalten wir:

$$f''(s) = f''(x_0) + (s - x_0)f'''(\xi).$$

Dieses Resultat führt zu:

$$f'(r) = f'(x_0) + (r - x_0)\, f''(x_0) + \frac{1}{2}(r - x_0)^2\; f'''(\xi).$$

Und damit:

$$f(x) = f(x_0) + \; (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\, f''(x_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3\, f'''(\xi).$$

Denken wir uns dieses Verfahren verallgemeinert, dann lässt sich eine Funktion darstellen als

$$f(x) = T_n(x_0; x) + \; R_n(x_0; x),$$

wobei $T_n(x_0; x)$ (manchmal auch einfach als $t_n(x)$ geschrieben, wenn der Entwicklungspunkt x_0 bekannt ist) das sogenannte **Taylor-Polynom zum Grad n** ist:

$$T_n(x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k.$$

Den Fehler, den man macht, wenn man die Funktion f durch dieses Polynom approximiert, ist durch das **Restglied** gegeben:

$$R_n(x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

wobei $\xi \in [x_0; x]$ eine (uns aber nicht bekannte) Zahl zwischen x_0 und x ist. Merken Sie sich: Neben dieser Restglieddarstellung gibt es noch eine Vielzahl von Varianten! Das so formulierte Restglied geht auf Lagrange zurück.