FU Berlin: SoSe 2015 (Mathematik 1, Weber)

Das Horner-Schema

Lernziel: Anwenden des Horner-Schemas zum "Abdividieren" von Nullstellen. Diese Technik ist für den ersten Übungszettel hilfreich.

Häufig kommt es in der Mathematik vor, dass Nullstellen eines Polynoms gesucht werden (in der chemischen Anwendung: Gleichgewichtskonzentrationen bei konkurrierenden Reaktionen ausrechnen, Vorzugskonformationen von organischen Molekülen bestimmen (Minimierung), Nichtlineare Gleichungen in der Röntgenkristallanalyse lösen (unter Ausnutzen der Taylor-Formel... kommt später in der Vorlesung dran))

Um Nullstellen von Polynomen mit Grad 2 zu finden, gibt es die bekannte (p,q)-Formel aus der Schule (LINK). Für Polynome höheren Grades (z.B. $x^3 + 5x^2 - 6$) gibt es Näherungsverfahren, die häufig das wiederkehrende Ausrechnen von immer gleichen Polynomen aber an unterschiedlichen Stellen x benötigen. Diese Verfahren müssen Sie nicht kennen, wer aber Interesse hat: LINK.

Manchmal kann man aber auch bei Polynomen eine Nullstelle bereits durch Ausprobieren erraten. Das Polynom $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ hat z.B. eine Nullstelle bei $x_1 = -1$.

Ein Rechenschema, mit dem man diese Nullstelle prüfen und gleichzeitig (ohne Polynomdivision) "abdividieren" kann, ist das Horner-Schema. Dieses Schema nutzt die Tatsache, dass sich das Polynom auch als $\Big(\big((x+2)x-5\big)x-6\Big)$ schreiben lässt. Dazu trägt man die Koeffizienten der einzelnen Monome (sortiert nach Monomgrad) in eine Tabelle ein. Unten links steht der höchste Koeffizient noch einmal.

1	2	-5	-6
1			

Danach führt man immer folgende Schritte durch: man multipliziert die aktuelle Zahl unten links mit der zu prüfenden Nullstelle (also $x_1 = -1$) und trägt das Ergebnis in die nächste mittlere Zelle. Also:

1	2	-5	-6
	-1		
1			

Die untereinander stehenden Zahlen werden addiert:

1	2	-5	-6
	-1		
1	1		

Und die ganze Prozedur beginnt von vorn (nun steht 1 als nächstes unten links):

1	2	-5	-6
	-1	-1	
1	1	-6	

Bis man schließlich erhält:

1	2	-5	-6
	-1	-1	6
1	1	-6	**0**

Die letzte Zahl ist das Polynom ausgewertet an der Stelle $x_1 = -1$. Es handelt sich tatsächlich um eine Nullstelle. Die anderen Zahlen (1,1,-6) in der letzten Zeile geben in diesem Fall die Koeffizienten für das Polynom an, das man erhält, wenn man die Nullstelle abdividiert. Das Polynom lautet $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$.

Man könnte jetzt die (p,q)-Formel anwenden, um alle Nullstellen des Polynoms $x^2 + x - 6$ zu erhalten. Man errät jedoch leicht eine weitere Nullstelle $x_2 = 2$. Mit dem Horner-Schema:

1	1	-6
	2	6
1	3	**0**

Übrig bleibt also (abzulesen an der letzten Zeile) das "Polynom" $x + 3$, das die Nullstelle $x_3 = -3$ hat. Auf diese Weise erhält man alle Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, die da lauten $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.