FU Berlin: WiSe 2022/23 (Mathematik II, Weber)

Abschlussklausur 27.2.2023, 9:15 bis 12:15

MATRIKELNUMMER: ______________________________

NAME: ____

UNTERSCHRIFT: _________________________________

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den übrigen Blättern und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie zudem jedes Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Bei Erreichen von mindestens 100 Punkten haben Sie die Klausur bestanden. Die einzelnen Aufgaben sind nicht gleich gewichtet. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Schreiben Sie leserlich.

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schmierpapier.

8. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**25**	**30**	**30**	**30**	**20**	**20**	**20**	**200**
Erreichte Punktzahl									

Resultierende Benotung der Klausur:

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Matrizen, 25 Punkte):

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/6 \\ -1 & 1 & 1/6 \\ 0 & -2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

a) Ist diese Matrix symmetrisch? Ist A orthogonal? Begründen Sie jeweils Ihre Ansicht!

b) Ist die lineare Abbildung, die durch A dargestellt wird, volumenerhaltend? Begründen Sie durch eine ausführliche Rechnung!

c) Begründen Sie, warum diese Matrix eine orientierungstreue Abbildung darstellt. Wie könnten Sie durch eine einfache Manipulation der Matrix eine orientierungsumkehrende Abbildung erhalten?

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme, 25 Punkte):

Gesucht sind die stöchiometrischen Koeffizienten der folgenden Reaktionsgleichung:

$$x_1\ H_2CO\ +\ x_2\ NH_3\ \rightarrow\ x_3\ (CH_2)_6N_4\ +\ x_4\ H_2O.$$

a) Bestimmen Sie mit einer ausführlichen Rechnung ganzzahlige stöchiometrische Koeffizienten für die Reaktionsgleichung!

b) Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu lösen wäre, um die Koeffizienten zu bestimmen! Schreiben Sie die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems Ax=b auf! Wie sieht die rechte Seite b des Gleichungssystems aus?

c) Warum stimmt folgende Aussage? Begründen Sie! Die Aussage: „Nur wenn der Rang der Matrix A nicht 4 ist, kann es sinnvolle stöchiometrische Koeffizienten für die Reaktionsgleichung geben.“

Aufgabe 3 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen, 30 Punkte):

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wichtig: Die folgenden Aufgaben sollen gelöst werden, OHNE das charakteristische Polynom dieser Matrix auszurechnen!

a) Wie können Sie zeigen, dass 1 kein Eigenwert dieser Matrix ist, ohne das charakteristische Polynom auszurechnen? (Hinweis: Kern einer Matrix) Führen Sie die vorgeschlagene Rechnung durch.

b) Zeigen Sie, dass 6 ein Eigenwert der Matrix A ist!

c) Vorausgesetzt der Eigenwert 6 der Matrix A ist algebraisch dreifach, was können Sie dann über die Diagonalisierbarkeit der Matrix A sagen? (Hierzu ist eine Berechnung der Eigenvektoren nötig)

Aufgabe 4 (Gradient und Hessematrix, 30 Punkte):

Gegeben sei folgende zweidimensionale Funktion:

$$f(x,y) = x^2 \ln(y) + \frac{1}{y}, \;\; y > 0.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f!

b) Berechnen Sie ausführlich die kritischen Punkte der Funktion f!

c) Für einen kritischen Punkt aus Aufgabenteil b) rechnen Sie ausführlich aus, ob es sich um ein Minimum, Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt!

Aufgabe 5 (Orthonormalsystem, 30 Punkte):

Folgende zwei Funktionen sind gegeben:

$$\hat{v}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\; \hat{v}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin{(x)}$$

und folgendes Skalarprodukt:

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung (insgesamt drei Integrale sind zu bestimmen), dass es sich bei diesen beiden Funktionen um ein Orthonormalsystem handelt! (Hinweis: $\int sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$)

b) Projizieren Sie mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung die Funktion $v_3(x) = x$ auf das obige Orthonormalsystem.

Aufgabe 6 (Bereichsintegral, 20 Punkte):

Berechnen Sie ausführlich den Wert des folgenden Bereichsintegrals über einem Normalgebiet D

$$\int_D (x^2 + xy)\, d(x,y),$$

wobei das Normalgebiet D ein Dreieck im (x;y)-Koordinatensystem ist, das die Eckpunkte (0;0), (1;-1) und (1;1) hat! Hinweis: Zeichnen Sie zunächst das Normalgebiet auf!

Aufgabe 7 (Kurvenintegral 2. Art, 20 Punkte):

Es ist folgendes Kurvenintegral gegeben:

$$\int_C y\sin(x)dx - \cos(x)\,dy.$$

a) Zeigen Sie, dass $y\sin(x)dx - \cos(x)\,dy = 0$ eine exakte Differentialgleichung ist!

b) Finden Sie mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung die Potentialfunktion zu dem obigen Integral!

c) Welchen Wert hat das Kurvenintegral, wenn die Kurve C ein Kreisbogen ist, der im Punkt (1;0) beginnt und im Punkt (1;0) endet? Zeigen Sie den Rechenweg!

Aufgabe 8 (Fouriertransformation, 20 Punkte):

Eine Funktion $g(x)$ mit der Eigenschaft $g(-x) = -g(x)$ heißt „ungerade Funktion“.
Eine Funktion $g(x)$ mit der Eigenschaft $g(-x) = g(x)$ heißt „gerade Funktion“.

Zur Lösung der folgenden Aufgabe dürfen Sie folgende Aussagen verwenden:

1) Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ für ungerade Funktionen $g(x)$.
2) $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.
3) Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

Die Aufgabe lautet, dass Sie folgende Aussage beweisen sollen:

Für ungerade Funktionen $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\boldsymbol{\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x)\, f(x)\, dx}$.

Viel Erfolg!