FU Berlin: WiSe 2022/23 (Mathematik II, Weber)

Zweitklausur 3.4.2023, 9:15 bis 12:15

MATRIKELNUMMER: ______________________________

NAME: ____

UNTERSCHRIFT: _________________________________

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den übrigen Blättern und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie zudem jedes Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Bei Erreichen von mindestens 100 Punkten haben Sie die Klausur bestanden. Die einzelnen Aufgaben sind nicht gleich gewichtet. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Schreiben Sie leserlich.

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schmierpapier.

8. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**25**	**25**	**30**	**30**	**20**	**25**	**20**	**200**
Erreichte Punktzahl									

Resultierende Benotung der Klausur:

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Matrizen, 25 Punkte):

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & X \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & Y \\ 0 & 1/\sqrt{3} & Z \end{pmatrix}.$$

Finden Sie passende Einträge für X, Y und Z in der Matrix A, so dass A eine orthogonale Matrix ist. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme, 25 Punkte):

Gesucht sind die stöchiometrischen Koeffizienten der folgenden Reaktionsgleichung:

$$x_1\, NO_2 \;+\; x_2\, C_6H_{12}O_6 \;\rightarrow\; x_3\, H_2CO_3 \;+\; x_4\, NH_3.$$

a) Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu lösen wäre, um die Koeffizienten zu bestimmen! Schreiben Sie die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems Ax=b auf! Wie sieht die rechte Seite b des Gleichungssystems aus?

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung!

c) Wie sieht die Lösung der Gleichung aus Aufgabenteil a) aus? Begründen Sie!

Aufgabe 3 (Determinante einer Matrix, 25 Punkte):

Gegeben sei folgende Matrix mit einer unbekannten Zahl (Parameter) x:

$$A = \begin{pmatrix} x+4 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & x & 3-x & 5-x \\ 6 & 0 & x & 6 \\ 2x+4 & 1 & 1 & 3+x \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante einer Matrix A identisch zu der Determinante der transponierten Matrix A^T ist, kann man eine Determinante auch dadurch ausrechnen, indem man mit Spalten- und Zeilenumformungen eine Dreiecksmatrix erzeugt. Dann muss man nur noch die Diagonalelemente der Dreiecksmatrix multiplizieren.

Rechnen Sie die Determinante der gegebenen Matrix A auf diese Weise aus! Geben Sie den ausführlichen Rechenweg an!

Aufgabe 4 (Gradient und Hessematrix, 30 Punkte):

Gegeben sei folgende zweidimensionale Funktion:

$$f(x, y) = 2\ln(xy) - x^2 - y^2.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f!

b) Berechnen Sie ausführlich die kritischen Punkte der Funktion f!

c) Für einen kritischen Punkt aus Aufgabenteil b) rechnen Sie ausführlich aus, ob es sich um ein Minimum, Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt!

Aufgabe 5 (Lineare Differentialgleichungssysteme, 30 Punkte):

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung, dass diese Matrix das charakteristische Polynom $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda$ hat!

b) Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms lautet $\lambda_1 = 0$. Wie lauten die anderen beiden Nullstellen?

c) Rechnen Sie ausführlich die Eigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten aus!

d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$?

Aufgabe 6 (Bereichsintegral, 20 Punkte):

Gegeben sei das Integral

$$\int_D \left(\cos\left(\sqrt[3]{3y}\right) - \ln\left(\sqrt[3]{3y}\right) + x\right)\, d(x, y),$$

wobei das Normalgebiet D hier nicht näher erklärt und auch in der Aufgabe nicht berücksichtigt werden soll. Die zu integrierende Funktion ist kompliziert, wenn man sie in den Variablen x und y integrieren möchte, daher beabsichtigt man eine Integration in den Variablen t und s, wobei folgender Zusammenhang gelten soll: $y = \frac{1}{3}s^3,\ x = \ln(s) + t$.

a) Wie sieht der neue Integrand aus (das Maß ist immer noch d(x,y)), wenn man diese Substitution einsetzt?

b) Nun soll das Maß d(x,y) auf das Maß d(s,t) umgerechnet werden. Dazu muss man die sogenannte Funktionaldeterminante berechnen. Führen Sie diese Umrechnung durch! Wie lautet also insgesamt der Integrand (mit Maß d(s,t))?

Aufgabe 7 (Kurvenintegral 2. Art, 25 Punkte):

Es ist folgendes Kurvenintegral gegeben:

$$\int_C \ (-\sin(x)y + 1)dx + (\cos(x) + \cos\,(y))\,dy.$$

a) Zeigen Sie, dass das Integral wegunabhängig ist! Geben Sie den Rechenweg zu Ihrer Begründung an!

b) Finden Sie mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung die Potentialfunktion zu dem obigen Integral!

c) Welchen Wert hat das Kurvenintegral, wenn die Kurve C ein Kreisbogen ist, der im Punkt (1;0) beginnt und im Punkt (0;1) endet? Zeigen Sie den Rechenweg!

Aufgabe 8 (Fouriertransformation, 20 Punkte):

Gegeben sei die Funktion f, die im Intervall $x \in [0; 1]$ den Wert e^x annimmt, aber ansonsten 0 ist.

a) Berechnen Sie ausführlich die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f](\omega)$ dieser Funktion f!

b) Hat $\mathcal{F}[f](\omega)$ reelle Nullstellen in ω? Begründen Sie Ihre Antwort!

Viel Erfolg!