FU Berlin: SoSe 2023 (Mathematik I, Weber)

Abschlussklausur 24.7.2023, 13:15 bis 16:15

MATRIKELNUMMER: ______________________________

NAME: ____

UNTERSCHRIFT: _________________________________

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den übrigen Blättern und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie zudem jedes Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Bei Erreichen von mindestens 100 Punkten haben Sie die Klausur bestanden. Die einzelnen Aufgaben sind nicht gleich gewichtet. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Schreiben Sie leserlich.

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schmierpapier.

8. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**25**	**25**	**30**	**30**	**20**	**25**	**20**	**200**
Erreichte Punktzahl									

Resultierende Benotung der Klausur: bestanden / nicht bestanden

Aufgabe 1 (Residuenkalkül, 25 Punkte):

Bestimmen Sie durch eine ausführliche Rechnung den Wert von folgendem uneigentlichen Integral mit Hilfe des Residuenkalküls. Begründen Sie auch, warum das Residuenkalkül verwendet werden darf.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Aufgabe 2 (Exakte Differentialgleichung, 25 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung an! Sie dürfen die Lösungen als implizite Funktionen schreiben. Weisen Sie an geeigneter Stelle Ihrer ausführlichen Rechnung nach, dass es sich um eine exakte Differentialgleichung handelt!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 2\cos(y)}$$

Aufgabe 3 (Faktorisieren von Polynomen, 25 Punkte):

Gegeben sei folgender komplexwertige Ausdruck:

$$\frac{x^3 - ix^2 - x + i}{x^2 + 1}.$$

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von Zähler- und Nennerpolynom!

b) Kürzen Sie den gegebenen Ausdruck mit Hilfe des Teilers aus Aufgabenteil a)!

c) Rechnen Sie aus, was der Wert des resultierenden Ausdrucks in b) ist, wenn Sie für x den Wert i einsetzen! Geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an.

Aufgabe 4 (Stammfunktionen finden, 30 Punkte):

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen des quadratischen Arkussinus, also

$$\int (\operatorname{asin}(x))^2 dx.$$

Tipp: Substituieren Sie zunächst mit $t = \operatorname{asin}(x) \Rightarrow x = \sin(t)$. Es entsteht ein Integral über t, das mit Hilfe partieller Integration zu lösen ist.

Aufgabe 5 (Körper, 30 Punkte):

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	**a**	**b**	**c**	1
3	0	3	**d**	**e**	1	**f**
4	0	4	5	**g**	**h**	**j**
5	0	5	**k**	2	**l**	**m**

a) Füllen Sie die rechte Tabelle die Buchstabenfelder so mit {1,2,3,4,5} aus, dass (bis auf Ausnahme der 0) eine abelsche Gruppe entsteht. Begründen Sie jeden einzelnen Eintrag stichwortartig!

b) Zeigen Sie anhand einer Rechnung, dass es sich bei den beiden Verknüpfungs-tafeln für Addition und Multiplikation nicht um einen Körper handelt! Begründen Sie!

Aufgabe 6 (Fixpunktiteration, 20 Punkte):

Nehmen wir an, Sie starten eine Fixpunktiteration, um den Fixpunkt $\tilde{x}$ einer Funktion zu finden, die eine Kontraktionseigenschaft mit Kontraktionszahl L erfüllt. Die Differenz zwischen der sechsten und siebten Iterierten sei $|x_7 - x_6| = 0.001$. Rechnen Sie aus, wie groß L in diesem Falle höchstens sein darf, so dass aus der a-posteriori-Schätzung folgt:

$$|x_7 - \tilde{x}| \leq 0.001 \ .$$

Aufgabe 7 (De L'Hospital, 25 Punkte):

Folgender Grenzwert soll ermittelt werden, indem Sie die Regel von De L'Hospital verwenden. Bitte rechnen Sie den Grenzwert ausführlich aus und geben Sie bei geeigneter Stelle der Rechnung an, warum De L'Hospital anwendbar ist:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}.$$

Aufgabe 8 (Komplexe Zahlen und Symmetrieoperationen, 20 Punkte):

Gegeben sei ein Dreieck in der komplexen Zahlenebene. Die Koordinaten der Eckpunkte seien: $a = 1, b = i$ und $c = -1$.

a) Begründen Sie anhand einer Skizze und einer kurzen Rechnung, dass gilt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Zeigen Sie durch eine Rechnung, welche Koordinaten das gegebene Dreieck erhält, wenn man es zunächst um 45° am Ursprung dreht und dabei um den Faktor $\sqrt{2}$ streckt und danach um 2 Einheiten nach oben verschiebt. Geben Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an!