FU Berlin: WoSe 2020 (Mathematik I, Weber)

Abschlussklausur 04.08.2020, 10:15 bis 13:15

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**30**	**20**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**25**	**200**
Erreichte Punktzahl									

☐ bestanden (mindestens 100 Punkte) ☐ nicht bestanden

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite oben angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Aufgabe 1: (Newton-Verfahren, 30 Punkte)

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens sollen die Nullstellen des folgenden Polynoms (mit komplexen Koeffizienten) bestimmt werden:

$$p(x) = x^3 + (-2 - i)\, x^2 + (1 + 2i)\, x - i.$$

a) Wie lautet die Iterationsvorschrift für das *allgemeine* Newton-Verfahren, wenn man die Nullstelle einer (differenzierbaren) Funktion f sucht?

b) Wie lautet die *konkrete* Iterationsvorschrift für das gegebene Polynom p? (Behandeln Sie komplexe Koeffizienten beim Ableiten so wie reelle Konstanten)

c) Eine Nullstelle des Polynoms ist $x = i$. Dividieren Sie mit Hilfe des Horner-Schemas oder mit Hilfe der Polynomdivision den entsprechenden Linearfaktor $(x - i)$ von dem obigen Polynom p ab! Zeigen Sie, dass sich dabei das Polynom $q(x) = x^2 - 2x + 1$ ergibt! Rechnen Sie die Nullstellen dieses Polynoms q aus! Schreiben Sie p als Produkt von Linearfaktoren!

d) Setzen Sie als Startwert für die Iterationsvorschrift in b) den Wert $x_0 = 1$ ein! Warum lässt sich die erste Iterierte x_1 nicht ausrechnen? Warum hat das Newton-Verfahren Probleme, Nullstellen zu finden, die im Sinne von c) mehrfache Nullstellen des Polynoms sind?

Aufgabe 2: (Regel von De L'Hospital, 20 Punkte)

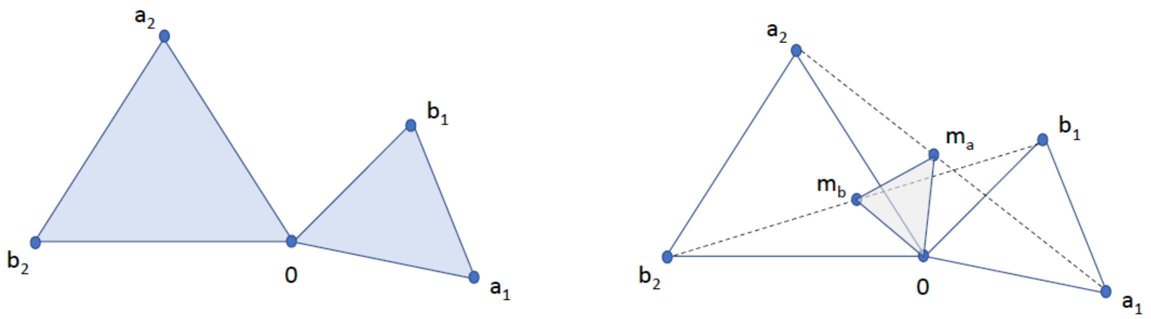
Gegeben seinen folgende zwei Grenzwertaufgaben:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^2} \qquad\qquad 2)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

a) Begründen Sie: Bei welcher Aufgabe lässt sich De L'Hospital anwenden und bei welcher nicht?

b) Rechnen Sie die beiden Grenzwerte aus.

Aufgabe 3: (Geometrie mit komplexen Zahlen, 25 Punkte)



Zwei gleichseitige Dreiecke $\Delta a_1 b_1 0$ und $\Delta a_2 b_2 0$ stoßen an einem Punkt (dem Ursprung 0, siehe linke Abbildung) zusammen. Zwischen den freien Ecken der beiden Dreiecke werden kreuzweise Verbindungsstrecken eingezeichnet (gestrichelte Linien, rechte Abbildung). Aus den Mittelpunkten m_a und m_b dieser beiden Strecken und dem Ursprung wird wieder ein Dreieck gebildet. Es soll gezeigt werden, dass dieses Dreieck $\Delta m_a m_b 0$ gleichseitig ist.

a) Sie wissen, dass ein Dreieck Δabc genau dann gleichseitig ist, wenn für die komplexen Zahlen a, b und c, sowie für $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ gilt: $a + b\omega + c\omega^2 = 0$. Welche zwei Gleichungen können Sie also wegen der Gleichseitigkeit der beiden Dreiecke $\Delta a_1 b_1 0$ und $\Delta a_2 b_2 0$ aufschreiben?

b) Mit welchen Formeln lassen sich die beiden Mittelpunkte m_a und m_b aus den Eckpunkten a_1, a_2, b_1, b_2 errechnen?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus a) und b) die Gleichseitigkeit des Dreiecks $\Delta m_a m_b 0$.

Aufgabe 4: (Substitution, partielle Integration, 25 Punkte)

Berechnen Sie die Stammfunktionen

$$\int \operatorname{asin}(x)\ dx,$$

wobei der Arkussinus $\operatorname{asin}(x)$ substituiert wird: $\mathrm{t} = \operatorname{asin}(x) \ \Rightarrow x = \sin(t)$. (Tipp: erst Substitution, dann partielle Integration)

Aufgabe 5: (Konvergenzradius, 25 Punkte)

Bestimmt werden soll Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{u,\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2n+1} x^n = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^5}{11} - \frac{x^7}{15} + \cdots$$

"u,∞" bedeutet: Jeder Koeffizient vor einem geraden Exponenten x^0, x^2, x^4 ... ist Null. Daher lässt sich nicht das Quotientenkriterium, sondern nur das Wurzelkriterium anwenden. Mit Hilfe der Regel von De L'Hospital lässt sich zeigen, dass $\frac{1}{n}\ln(2n+1)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert (müssen Sie nicht beweisen).

a) Rechnen Sie mit Hilfe dieser Vorgaben aus, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 1 ist! (Tipp: Was ist $\left|(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right|$?)

b) Nennen Sie eine komplexe (nicht-reelle) Zahl, für die die gegebene Potenzreihe konvergiert und eine komplexe (nicht-reelle) Zahl, für die die Reihe divergiert. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten!

Aufgabe 6: (Uneigentliches Integral, Residuensatz, 25 Punkte)

Berechnet werden soll der Wert des uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1}\ dx.$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nenners der Funktion! (Um die p-q-Formel anwenden zu können, können Sie zunächst $z = x^2$ setzen.)

b) Wie lautet die Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren?

c) Rechnen Sie ausführlich die Residuen $res_i \frac{1}{x^4+2x^2+1}$ und $res_{-i} \frac{1}{x^4+2x^2+1}$ aus.

d) Welchen der beiden Ausdrücke in c) verwenden Sie, um den Wert des uneigentlichen Integrals zu bestimmen? Begründen Sie! Geben Sie den Wert des uneigentlichen Integrals an!

Aufgabe 7: (Exakte Differentialgleichung, 25 Punkte)

Gesucht ist eine Funktion y(x), die für $x \neq \frac{3}{2}$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y}{2x - 3}.$$

a) Zeigen Sie durch Umformung der Gleichung, dass sich eine exakte Differentialgleichung ergibt. (Rechnen Sie auch nach, dass die Gleichung exakt ist!)

b) Geben Sie alle Lösungen der exakten Differentialgleichung aus a) an.

Aufgabe 8: (Potenzreihenentwicklung, 25 Punkte)

Es soll ein Taylorpolynom bestimmt werden, das die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ approximiert.

a) Bestimmen Sie die erste $f'(x)$ und zweite Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$! Welche Werte $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)$ haben diese Ausdrücke am Entwicklungspunkt?

b) Schreiben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) das Taylorpolynom zweiten Grades von f auf!

c) Durch Überlegung: Wenn die Funktion $\mathrm{atan}\,(x)$ ("Arkustangens von x") abgeleitet $\frac{1}{x^2+1}$ ergibt, wie würde eine entsprechende Näherung durch ein Taylorpolynom (dritten Grades) von der Funktion $\mathrm{atan}\,(x)$ aussehen? (Hinweis: $\mathrm{atan}(0) = 0$)

Viel Erfolg!