FU Berlin: WoSe 2019 (Mathematik I, Weber)

# Abschlussklausur 24.07.2019, 10:15 bis 13:15

**Name:**

**Matrikelnummer:** **Unterschrift:**

**Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):**

| **Aufgabe** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | **Summe** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Maximal erreichbare Punkte** | **20** | **25** | **25** | **25** | **20** | **30** | **25** | **30** | **200** |
| **Erreichte Punktzahl** | | | | | | | | | |

☐ bestanden (mindestens 100 Punkte) ☐ nicht bestanden

---

**Allgemeine Hinweise zur Klausur:**

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite oben angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

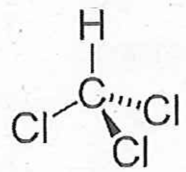
6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

---

**Aufgabe 1: (Symmetriegruppen, Eigenschaften einer Gruppe, 20 Punkte)**



Die Abbildung zeigt die Strukturformel von Chloroform. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie jeweils.

**a)** Die Symmetriegruppe, welche die Molekülsymmetrie von Chloroform beschreibt, besteht neben den Drehungen um die H-C-Achse mit einem Winkel von 0° (= Identität), 120° beziehungsweise 240° auch aus bestimmten Spiegelungen.

**b)** Eine Drehung um eine der C-Cl-Achsen um 240° ist ebenfalls Element der Symmetriegruppe von Chloroform.

**c)** Wenn man bei Chloroform ein Cl-Atom durch ein F-Atom ersetzen würde, dann hätte die Symmetriegruppe der so erhaltenen Molekülstruktur nur 2 Elemente.

**d)** Die Drehung um 120° ist in der Symmetriegruppe von Chloroform das inverse Element zur Drehung um 240° (jeweils um die H-C-Achse).

**Aufgabe 2: (Stammfunktionen ausrechnen, 25 Punkte)**

Ermitteln Sie (für positive $x$) die Stammfunktionen

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx,$$

wobei Sie substituieren: $t = \sqrt{x}$. Geben Sie den genauen Rechenweg an!

**Aufgabe 3: (Konvergenzradius bestimmen, 25 Punkte)**

**a)** Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Geben Sie den Rechenweg an! (Nutzen Sie $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$$

**b)** Konvergiert die Reihe in Aufgabenteil a) auch für $x = 2$? Geben Sie eine komplexe (nicht reelle) Zahl für $x$ an, für die die Reihe konvergiert. Begründen Sie jeweils Ihre Ansicht!

**Aufgabe 4: (Nullstellen von Polynomen, Newton-Verfahren, 25 Punkte)**

Im Folgenden sollen alle Nullstellen des Polynoms

$$x^3 - x^2 + x - 1$$

angegeben werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

**a)** Mit Hilfe des Newton-Verfahrens soll eine Nullstelle des Polynoms angenähert werden. Schreiben Sie die Iterationsvorschrift (Fixpunktfunktion) des Newton-Verfahrens für dieses spezielle Polynom auf!

**b)** Setzen Sie als Startpunkt des Newton-Verfahrens die negative imaginäre Einheit $x_0 = -i$ ein. Welche Iterierte $x_1$ erhalten Sie? Was bedeutet das Resultat? Begründen Sie!

**c)** Dividieren Sie vom Ausgangspolynom den Linearfaktor $(x + i)$ mittels Polynomdivision oder mittels Horner-Schema ab!

**d)** In Aufgabenteil c) erhalten Sie ein Polynom zweiten Grades. Rechnen Sie dessen Nullstellen aus! Schreiben Sie das Polynom $x^3 - x^2 + x - 1$ als Produkt von drei Linearfaktoren!

**Aufgabe 5: (Konvergenz einer Fixpunktiteration, 20 Punkte)**

Sei $\phi(x)\colon [0;1] \to [0;1]$ eine stetige Fixpunktfunktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[0;1]$ und für alle $x, y \in [0;1]$ gelte die Bedingung:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|.$$

**a)** Geben Sie einen möglichen Wert für $L$ und einen möglichen Startwert $x_0$ an, so dass die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen einen eindeutigen Fixpunkt in dem Intervall $[0;1]$ konvergiert. Begründen Sie Ihre Wahl!

**b)** Geben Sie die Formel für die a-posteriori-Fehlerschätzung für diese Fixpunktfunktion an! Was bedeuten die Ausdrücke in dieser Formel?

**Aufgabe 6: (Uneigentliches Integral, Residuensatz, 30 Punkte)**

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 18x^2 + 81}.$$

**a)** Bestimmen Sie die Polstellen von $f$! (Tipp: Setzen Sie zunächst $z = x^2$) Welche Polstelle liegt in der oberen komplexen Halbebene?

**b)** Schreiben Sie den Nenner von $f$ als Produkt von Linearfaktoren.

**c)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertformel und einem geeigneten $m$ das Residuum $res_{3i}\, f$. (Tipp: Es wird $m = 2$ sinnvollerweise zu wählen sein, d.h. eine erste Ableitung wird zu rechnen sein)

**d)** Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

**Aufgabe 7: (Exakte Differentialgleichung, 25 Punkte)**

Gesucht sind alle (impliziten) Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$x \cos(x)\ y\, e^y dx + y\, e^y\, x \sin(x)\, dy = 0$$

**a)** Zeigen Sie, dass diese Gleichung nicht exakt ist.

**b)** Teilen Sie die (beiden Seiten der) Gleichung durch $xy$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung, die sich dann ergibt, exakt ist.

**c)** Finden Sie alle Lösungen der exakten Differentialgleichung aus b). Sie dürfen die Lösungen implizit darstellen.

**d)** In b) haben Sie die beiden Seiten einer Gleichung durch $xy$ geteilt. Das geht ja nur für $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Damit könnten Lösungen der Differentialgleichung "verloren gegangen" sein. Zeigen Sie, dass auch $x = 0$ bzw. $y = 0$ weitere Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind.

**Aufgabe 8: (Potenzreihenansatz, 30 Punkte)**

Eine "quadratische Näherung" der Funktion $f(x)$ ist gesucht, die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$f'(x) \cdot f(x) = x^2.$$

Weiterhin soll folgende Anfangsbedingung gelten: $f(1) = 1$. Dazu soll die Funktion in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

**a)** Schreiben Sie allgemein auf, wie die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f$ an einem Entwicklungspunkt $x_0$ definiert ist und geben Sie an, wie die Koeffizienten $a_n$ dieser Entwicklung bei der Taylorreihe bestimmt werden.

**b)** Welcher Entwicklungspunkt eignet sich für die obige Differentialgleichung? Geben Sie eine begründete Antwort!

**c)** Bestimmen Sie aus der Anfangsbedingung und der Differentialgleichung die Koeffizienten $a_0$ und $a_1$!

**d)** Leiten Sie die Differentialgleichung auf beiden Seiten der Gleichung nach $x$ ab. Mit Hilfe der neu gewonnenen Gleichung bestimmen Sie den Koeffizienten $a_2$ der Taylorreihe.

**e)** Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades? Erfüllt dieses die ursprüngliche Differentialgleichung?

**Viel Erfolg!**

## Aufgabe 1

a) Richtig. Auch Spiegelungen an Ebenen, die von den Atomen Cl–C–H aufgespannt werden, sind Symmetrieoperationen, die Chloroform unverändert lassen.

b) Falsch. Eine Drehung um eine C–Cl-Achse um 240° dreht das H-Atom auf die Position eines Cl-Atoms

c) Richtig: Eine Spiegelung an der F–C–H-Ebene und die Identität.

d) Richtig, denn die Drehung um 120°+240° = 360° ist die Identität.

## Aufgabe 2

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\cos(t)}{t}\,2t\,dt = 2\int \cos(t)\,dt$$

$$= 2\sin(t) + c = 2\sin(\sqrt{x}) + c$$

## Aufgabe 3:

Potenzreihe: $\sum a_n (x-x_0)^n$

a) $$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}$$

D.h. die Reihe konvergiert in einem Kreis um $x_0 = 1$ mit Radius $r = \frac{1}{3}$

b) 2 liegt außerhalb des Kreises $\Rightarrow$ Divergenz

$1+\frac{1}{4}i$ liegt innerhalb des Kreises $\Rightarrow$ Konvergenz

## Aufgabe 4:

a) $$\phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 - 2x_n + 1}$$

b) $$x_1 = \phi(x_0) = \phi(-i) = -i - \frac{(-i)^3 - (-i)^2 + (-i) - 1}{3(-i)^2 - 2(-i) + 1}$$

$$= -i - 0 = -i$$

$\Rightarrow$ $-i$ ist Fixpunkt von $\phi$ und damit Nullstelle des Polynoms

c)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |
| $x=-i$ | | $-i$ | $i-1$ | $1$ |
| | $1$ | $-1-i$ | $i$ | $\underline{\underline{0}}$ |

$x^2 - (1+i)x + i$

d) Da $-i$ Nullstelle ist, ist auch $i$ Nullstelle.
Mittels Horner-Schema abdividieren:
(von dem Polynom aus c))

| | 1 | $-1-i$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $x = i$ | | $i$ | $-i$ |
| | 1 | $-1$ | $\underline{\underline{0}}$ |

$x - 1$

Daher lauten die Nullstellen: $i$, $-i$ und $1$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-i)(x+i)(x-1)$$

<u>Aufgabe 5:</u>

a) Wählt man z.B. $L = 0{,}2$ $(<1)$ $(\in [0;1])$ und $x_0 = 1$, dann gelten die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach, daraus folgen die Eigenschaften, die in a) gefordert werden.

b)

$$\underbrace{|x_{n+1} - \tilde{x}|}_{\text{Abstand der Folgeiterierten zum eigentlichen Fixpunkt } \tilde{x}} \leq \frac{L}{1-L} \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\text{Abstand zur nächsten Iterierten}}$$

$L$: Kontraktionsfaktor

$x_n$: aktuelle Iterierte

Aufgabe 6:

a) Nullstelle von $x^4+18x^2+81$ durch Substitution

$x^2=z \qquad z_{1/2}=-9\pm\sqrt{9^2-81}=-9$

Daher: $x_{1/2}=-3i \quad x_{3/4}=3i$

obere Halbebene

b) $$f(x)=\frac{1}{(x-3i)^2(x+3i)^2}$$

c) $$\operatorname{res}_{3i} f=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{x\to 3i}\frac{d}{dx}\left((x-3i)^2\cdot\frac{1}{(x-3i)^2(x+3i)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{x\to 3i}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+3i)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3i}-2(x+3i)^{-3}=-2\cdot(6i)^{-3}=-\frac{2}{216}\cdot\frac{1}{-i}$$

$$=\frac{2}{216\cdot i}=\frac{1}{108\cdot i}$$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\cdot\frac{1}{108\cdot i}=\frac{1}{54}\pi$$

Aufgabe 7:

a) da $\frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{x}\cos(x)\cdot y\cdot e^y\right) = x\cos(x)\cdot\left(e^y + ye^y\right)$

$\neq$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^y x \sin(x)\right) = ye^y\left(\sin(x) + x\cdot\cos(x)\right)$

ist die DGL nicht exakt

b) $\cos(x)\, e^y\, dx + e^y \sin(x)\, dy = 0$

ist exakt, da $\frac{\partial}{\partial y}\cos(x)e^y = \cos(x)e^y$

$\parallel$

$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x)\cdot e^y = \cos(x)\cdot e^y$

c) Die Funktion $U(x,y) = \sin(x)\cdot e^y + c$ ergibt nach x abgeleitet $e^y\cdot\cos(x)$ und nach y abgeleitet $\sin(x)\cdot e^y$ und daher ist die allgemeine Lösung von b)

$U(x,y) = \boxed{\sin(x)\cdot e^y + c = 0}$

d) Wenn man $x=0$ oder $y=0$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, steht auf beiden Seiten 0

$\Rightarrow$ auch diese Wahl löst die DGL

Aufgabe 8:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

b) $x_0 = 1$ eignet sich, da der Anfangswert $f(1)=1$ an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben ist.

c) $f(1) = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = \frac{f(1)}{1} = f(1) = 1$

DGL:

$f'(1) \cdot f(1) = 1 \Longrightarrow f'(1) \cdot 1 = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$

$\Rightarrow a_1 = \frac{f^{(1)}(1)}{1!} = \frac{f'(1)}{1!} = f'(1) = 1$

d) DGL: $f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x) = 2x$

$f''(1) \cdot f(1) + f'(1) \cdot f'(1) = 2 \Rightarrow f''(1) = 1$

$\Longrightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(1)}{2!} = \frac{f''(1)}{2} = \frac{1}{2}$

e) Taylorpolynom: $\frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1) + 1$

$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x - 1 + 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

in die DGL eingesetzt ergibt sich, dass $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ keine Lösung ist.

$x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) \neq x^2$