FU Berlin: SoSe 18 (Mathematik I, Weber)

Abschlussklausur 26.7.2018, 10:30 bis 13:30

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**30**	**25**	**25**	**20**	**25**	**20**	**30**	**200**
Erreichte Punktzahl									

☐ bestanden (mindestens 100 Punkte) ☐ nicht bestanden

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite oben angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Aufgabe 1: (Nullstellen von Polynomen, Newton-Verfahren, 25 Punkte)

Im Folgenden sollen alle Nullstellen des Polynoms

$$x^3 + 3x^2 - 8x - 30$$

angegeben werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Mit Hilfe des Newton-Verfahrens soll eine reelle Nullstelle des Polynoms angenähert werden. Schreiben Sie die Iterationsvorschrift (Fixpunktfunktion) des Newton-Verfahrens für dieses spezielle Polynom auf!

b) Nehmen wir an, dass Sie im Teil a) eine Nullstelle $x_1 = 3$ gefunden haben. Dividieren Sie vom Ausgangspolynom den Linearfaktor $(x - 3)$ mittels Polynomdivision oder mittels Horner-Schema ab!

c) In Aufgabenteil b) erhalten Sie ein Polynom zweiten Grades. Rechnen Sie dessen Nullstellen aus! Schreiben Sie das Polynom $x^3 + 3x^2 - 8x - 30$ als Produkt von Linearfaktoren!

d) Das Newton-Verfahren (für das Finden einer Nullstelle von f) ist ineffizient, wenn f und f' gemeinsame Nullstellen haben. Nehmen wir an, f und f' seien Polynome. Der größte gemeinsame Teiler sei $ggT(f, f') = x^2 - 1$. Haben f und f' gemeinsame Nullstellen? Wenn ja: Können Sie *alle* gemeinsamen Nullstellen angeben? Begründen Sie!

Aufgabe 2: (Substitution, Partielle Integration, 30 Punkte)

Ermitteln Sie (für $x \in [0; 1]$) die Stammfunktionen

$$\int \mathrm{e}^{\operatorname{asin}(\mathrm{x})}\, dx,$$

wobei $\operatorname{asin}(\mathrm{x})$ ("Arkussinus") die Umkehrfunktion des Sinus sein soll, also

$$t = \operatorname{asin}(x) \quad \Longrightarrow \quad x = \sin(t).$$

Aufgabe 3: (Eigenschaften von Gruppen prüfen, 25 Punkte)

Gegeben sei die Menge {0,1,2,3} und die darauf definierte Verknüpfung #:

#	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

a) Ist die Gleichung 2 # x = 3 lösbar? Bildet die Menge {0,1,2,3} mit der oben definierten Verknüpfung also eine Gruppe?

b) Gibt es ein neutrales Element der Verknüpfung #? Begründen Sie Ihre Aussage!

c) Gibt es zu jedem Element der Menge {0,1,2,3} ein inverses Element bezüglich der Verknüpfung #? Begründen Sie Ihre Aussage!

d) Gilt für die Verknüpfung # das Kommutativgesetz? Begründen Sie Ihre Aussage!

e) An welcher Stelle ist folgende Umformung falsch? Begründen Sie Ihre Aussage!

$2 \# x = 3 \qquad | \; von\ links\ mit\ (2\#)\ verknüpfen$

$\Leftrightarrow 2 \# 2 \# x = 2 \# 3 \qquad | \; 2\ ist\ inverses\ Element\ zu\ 2$

$\Leftrightarrow 0 \# x = 2 \# 3 \qquad | \; 0\ ist\ neutrales\ Element$

$\Leftrightarrow x = 2 \# 3 = 1.$

Aufgabe 4: (Komplexe Zahlen und geometrische Bedeutung, 25 Punkte)

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass in der komplexen Zahlenebene eine 90° - Drehung um das Drehzentrum (1+i) das Gleiche ist, wie eine 90°-Drehung um den Ursprung gefolgt von einer Translation (Verschiebung) um 2 Einheiten nach rechts. Um diese Behauptung zu beweisen, gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Die Multiplikation mit *welcher* komplexen Zahl (in kartesischer Darstellungsform) stellt eine 90°-Drehung um den Ursprung dar? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Erläutern Sie anhand der geometrischen Interpretation der Rechenoperationen, dass der Ausdruck $\big(z-(1+i)\big)\cdot i+(1+i)$ eine 90°-Drehung des Punktes z um das Drehzentrum (1+i) bedeutet!

c) Formen Sie den Ausdruck aus Teil b) so um, dass Sie die obige Behauptung beweisen können.

Aufgabe 5: (Konvergenzradius, 20 Punkte)

a) Berechnen Sie für x den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\, x^n.$$

b) Konvergiert diese Reihe für $x=3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6: (Potenzreihenansatz, 25 Punkte)

Gesucht ist jetzt eine Funktion $f(x)$, die folgende Anfangswertaufgabe löst:

$$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0, \quad f(0)=1,\ f'(0)=0.$$

Nutzen Sie zur Berechnung der Funktion den Ansatz $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, wobei die Koeffizienten durch eine Taylor-Reihe gegeben sind. Für den n-ten Koeffizienten gilt also $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

a) Welcher Entwicklungspunkt x_0 eignet sich aufgrund der Anfangswertaufgabe für die Taylor-Reihe? Bestimmen Sie daraus die Werte für a_0 und a_1.

b) Wie lauten die Potenzreihenentwicklungen für $f'(x)$ und für $f''(x)$? Achten Sie darauf, dass alle Reihen mit $n=0$ beginnen. (Indexverschiebung)

c) Bestimmen Sie aus der Differentialgleichung und aus den Ergebnissen von b) eine Rekursionsformel für a_{n+2}, wenn a_{n+1} und a_n gegeben sind.

d) Rechnen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel a_2 und a_3 aus.

Aufgabe 7: (Exakte Differentialgleichung, 20 Punkte)

a) Ist die folgende Differentialgleichung exakt? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$(2x + 3y^2)\, y' = -(3x^2 + 2y)$$

b) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung aus Teil a) als implizite Funktion an!

Aufgabe 8: (Residuensatz, 30 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4}\, dx.$$

a) Es gilt, dass $x^4 + 4 = (x - 1 - i) \cdot (x + 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x + 1 + i\,)$. Welche Polstellen des Integranden liegen also in der oberen komplexen Halbebene?

b) Die Residuen des Integranden an den beiden Polstellen, die Sie in Teil a) identifiziert haben, haben den Wert $(\frac{-i \pm 1}{16})$. Zeigen Sie den Rechenweg!

c) Mit Hilfe der Residuen aus Aufgabenteil b) ermitteln Sie nun den Wert des Integrals.

Hinweis: Sie können bei b) verwenden, dass

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Viel Erfolg!