FU Berlin: SoSe 18 (Mathematik I, Weber)

Abschlussklausur 25.9.2018, 10:30 bis 13:30

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**30**	**25**	**25**	**20**	**25**	**20**	**30**	**200**
Erreichte Punktzahl									

☐ bestanden (mindestens 100 Punkte) ☐ nicht bestanden

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite oben angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Aufgabe 1: (Die Regel von De L'Hospital, 25 Punkte)

Wir wollen im Folgenden den Grenzwert ausrechnen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{3}{\ln(1+x)} - \frac{2}{x}}$$

a) Schreiben Sie den detaillierten Rechenweg auf, um aus dem zu betrachtenden Ausdruck einen einzelnen Bruch zu machen. Dieser lautet: $\frac{\mathrm{x} \ln(x+1)}{3x - 2\ln(x+1)}$.

b) Prüfen Sie die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Regel von De L'Hospital.

c) Schreiben Sie die Berechnung des Grenzwertes ausführlich auf.

Aufgabe 2: (Stammfunktionen bilden, 30 Punkte)

Ermitteln Sie die Stammfunktionen

$$\int x^2 \, \mathrm{e}^{2x} \, dx.$$

Berechnen Sie dazu zunächst in einer Zwischenrechnung die Stammfunktionen von e^{2x} mit Hilfe der Substitution $t = 2x$. Danach lösen Sie das obige Integral.

Aufgabe 3: (Rechengesetze eines Körpers, 25 Punkte)

Die folgenden beiden Tabellen sollen die Verknüpfungstafeln für die Addition bzw. Multiplikation eines Körpers mit drei Elementen {0,1,2} darstellen.

+	0	1	2
0	0		
1	1	2	
2	2	0	

.	0	1	2
0	0		
1	0		
2	0	2	

a) Ergänzen Sie die noch fehlenden Einträge in den Tabellen, so dass sich ein Körper ergibt.

b) Begründen Sie kurz, wie Sie auf die fehlenden Einträge gekommen sind. (Stichwort: abelsche Gruppen)

c) Es soll in diesem Körper das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$(2 \cdot y) + x = 1$$
$$y + (2 \cdot x) = 1 + x$$

Addieren Sie dazu zunächst die beiden Gleichungen. Arbeiten Sie dann anhand der Gleichung weiter, die Sie durch diesen Schritt erhalten haben. Kommentieren Sie Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 4: (Konvergenz von Fixpunktiterationen, 25 Punkte)

Die folgende Gleichung soll näherungsweise gelöst werden:

$$\cos(x) = x + \frac{1}{2}.$$

a) Wie würde man mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Iterationsvorschrift konstruieren, um die Lösung der Gleichung zu approximieren? Schreiben Sie die konkrete Fixpunktfunktion gemäß Newton für diese Gleichung auf!

b) Die Lösung der Gleichung wäre auch durch einen Fixpunkt der alternativen Funktion $\phi(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$ gegeben. Begründen Sie anhand eines Satzes aus der Vorlesung, dass in dem Intervall [-1.5; 0.5] die Funktion ϕ genau einen Fixpunkt hat. Hinweis: Sie können verwenden, dass $-1.5 > -\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 5: (Wurzeln einer komplexen Zahl, 20 Punkte)

Berechnen Sie alle komplexwertigen Lösungen der Gleichung $x^4 + 4 = 0$ in Polardarstellung. Schreiben Sie den Rechenweg ausführlich auf. Hinweis: $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Aufgabe 6: (Potenzreihenansatz, 25 Punkte)

Eine Funktion $f(x)$ ist gesucht, die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$f''(x) \cdot f(x) = 1 + 2x.$$

Weiterhin sollen folgende Anfangsbedingungen gelten: $f(0) = 1,\ f'(0) = 1$.

a) Mit Hilfe der Anfangsbedingungen kann man bereits das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f(x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ angeben. Wie lautet dieses? Geben Sie den Rechenweg an!

b) Mit Hilfe der Anfangsbedingungen und durch Einsetzen in die Differentialgleichung kann man auch das Taylorpolynom zweiten Grades aufschreiben. Wie lautet dieses? Geben Sie den Rechenweg an!

c) Indem man beide Seiten der Differentialgleichung nach x differenziert (und die Kettenregel beachtet), kann man auch das Taylorpolynom dritten Grades ausrechnen. Zeigen Sie, wie der Rechenweg dazu aussieht!

Aufgabe 7: (Implizites Differenzieren, 20 Punkte)

Eine Funktion $y(x)$ ist implizit gegeben als

$$\cos(xy) = \mathrm{y}.$$

Welchen Wert hat die Ableitung $y'(0)$ an der Stelle $x = 0$? Schreiben Sie den ausführlichen Rechenweg auf!

Aufgabe 8: (Residuensatz, 30 Punkte)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}.$$

a) Bestimmen Sie die Polstellen von f. Welche Polstelle liegt in der oberen komplexen Halbebene?

b) Schreiben Sie den Nenner von f als Produkt von zwei Linearfaktoren.

c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

d) Geben Sie eine Funktion $g(x)$ an, die so wie $f(x)$ auch der Kehrwert eines reellen, quadratischen Polynoms ist, deren Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ man aber nicht mit Hilfe des Residuensatzes berechnen kann, und begründen Sie Ihre Ansicht.

Viel Erfolg!