

Erste Teilklausur 12.6.2015 12:15 bis 13:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.
3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.
4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.
5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!
6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.
7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).
8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Maximal erreichbare Punkte	15	35	20	30	100
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: _____

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Ende Juni) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
- ☐ unter meiner Matrikelnummer
- ☐ unter folgendem Kürzel: _____

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:**Matrikelnummer:****Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Betrag, Real-/Imaginärteil, Konjugation, 15 Punkte) Bestimmen Sie den Betrag, den Real- und den Imaginärteil, sowie die konjugiert komplexe Zahl von

a) $3 + 2i$ b) i c) 2 d) $2e^{i\pi/3}$ e) $\frac{2+4i}{3-i}$

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 2: (Nullstellen von Polynomen, 35 Punkte)

Es sollen alle fünf (reellen und komplexwertigen) Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2$$

bestimmt werden. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- a) Schreiben Sie die Rekursionsformel des Newton-Verfahrens auf, die sich ergibt, wenn Sie die Nullstellen von $f(x)$ iterativ bestimmen wollen.
- b) Setzen Sie für den Startwert des Newton-Verfahrens $x_0 = 1$ an und berechnen Sie den ersten Iterationsschritt x_1 .
- c) Setzen Sie für den Startwert des Newton-Verfahrens die imaginäre Einheit $x_0 = i$ ein und rechnen Sie den ersten Iterationsschritt x_1 aus. Geben Sie x_1 in der kartesischen Darstellung für komplexe Zahlen an.
- d) Nehmen wir an, Sie haben über obiges Verfahren die beiden Nullstellen **2** und **-1** gefunden. Dividieren Sie die beiden Nullstellen von dem ursprünglichen Polynom $x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2$ ab! Dazu können Sie entweder das Horner-Schema verwenden oder nacheinander Polynomdivision mit den Faktoren $(x - 2)$ und $(x + 1)$ durchführen.
- e) In Aufgabe d) ergibt sich ein Polynom der Form $x^3 - z$. Bestimmen Sie die fehlenden drei Nullstellen des Polynoms, indem Sie die drei dritten Wurzeln von z berechnen.

Aufgabe 3: (Körper, 20 Punkte)

Gegeben ist ein Körper mit vier Elementen $\{[0], [1], [2], [3]\}$ und folgenden Verknüpfungstafeln:

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[0]	[3]	[2]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[2]	[1]	[0]

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[3]	[1]
[3]	[0]	[3]	[1]	[2]

Lösen Sie in diesem Körper durch Umformungen oder durch die Lösungsformel

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow x = \frac{d - b}{a - c}$$

folgende Gleichungen:

a) $[2] \cdot x + 1 = [3] \cdot x + [2]$ **b)** $x + [2] = [2] \cdot x$

Aufgabe 4: (Unbestimmte und uneigentliche Integrale, 30 Punkte)

a) Zeigen Sie nach dem Quotientenkriterium, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

konvergiert. (Damit zeigen Sie auch, dass $n^2 e^{-n}$ für $n \rightarrow \infty$ eine Nullfolge ist.)

b) Finden Sie mittels partieller Integration die Stammfunktion $\int x^2 e^{-x} dx$.

c) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$.

d) Bestimmen Sie mittels Substitution die Stammfunktion

$$\int \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)} dx,$$

wobei Sie $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ setzen. Damit gilt: $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.