FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „Kongruenzabbildungen“

Lernziel: Zusammenhang zwischen Determinantenvorzeichen und Spiegelung.

Gegeben sei folgende Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Frage: Ist die Multiplikation mit dieser Matrix eine Kongruenzabbildung in $\mathbb{R}^3$? (Werden also Winkel und Längen durch diese Abbildung erhalten? Werden Skalarprodukte durch diese Abbildung erhalten? Sprich: Ist die Matrix orthogonal?)

Antwort: Da $Q^T Q = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist, ist Q eine orthogonale Matrix, stellt also eine Kongruenzabbildung dar.

Frage: Enthält die Kongruenzabbildung Q eine Spiegelung?

Idee: Sei A eine Martix mit drei Spalten-Vektoren, die der „Rechten-Hand-Regel“ entsprechen, dann hat das Volumen des Spats der drei Vektoren, ausgedrückt durch $\det(A)$, ein positives Vorzeichen. Da Q eine Kongruenzabbildung ist, bleibt das Volumen des Spates bei der Abbildung konstant, also $|\det(QA)| = |\det(A)|$. Bei einer Spiegelung würde das Vorzeichen von $\det(A)$ wechseln, da aus einer „Rechten-Hand“ eine „Linke-Hand“ würde. Enthält also Q ene Spiegelung, dann wäre $\det(\mathrm{Q}) = -1$, andernfalls wäre $\det(Q) = 1$.

Antwort: Da die Determinante $\det(\mathrm{Q}) = -1$, enthält die Kongruenzabbildung eine Spiegelung. Für eine spiegelfreie Kongruenzabbildung müsste man zwei Spalten oder Zeilen von Q austauschen. Etwa so:

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$