FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo, Weber)

Übungszettel Nr. 3, Abgabe: 07.05.2012 vor der Vorlesung

Lernziel: Etwas Algebra mit Hilfe komplexer Zahlen. Beispiele für Vektorräume und Nicht-Körper. Matrixmultiplikation.

I Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Die Gleichung $a^2 + 2a + 2 = 0$ lässt sich für reelle Zahlen a nicht lösen. Geben Sie alle Lösungen $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ der Gleichung im Körper der komplexen Zahlen an. Um eine solche Gleichung zu lösen, muss man erst einmal die reelle Zahl 2 als komplexe Zahl $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ schreiben und alle Additionen/Multiplikationen in $\mathbb{R}$ durch die Additions-/Multiplikationsregeln in $\mathbb{C}$ ersetzen. Man erhält zwei (nichtlineare) Gleichungen mit zwei Unbekannten, die zu lösen sind. (*4 Punkte*)

Aufgabe 2:
a) Auf dem Definitionenzettel, auf dem die Multiplikationsregeln zusammengefasst sind, stehen auch Regeln für die Multiplikation von reellwertigen 3er- und 4er-Tupeln (Kreuzprodukte). Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, dass diese Multiplikationsregeln nicht geeignet sind, um (zusammen mit der üblichen komponentenweisen Additionsregel) einen Körper für die reellwertigen 3er- und 4er-Tupel zu definieren.
(*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller (reellen) Zahlentripel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = 0 \\ 3x & +6y & +8z & = 0 \\ 4x & +8y & +11z & = 0 \end{array}$$

lösen, (mit den üblichen Rechenregeln) einen Vektorraum über den reellen Zahlen darstellen. Um dieses zu zeigen, müssen Sie das Gleichungssystem *nicht* lösen.
(*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Um das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 2 tatsächlich zu „lösen" (das ist in Aufgabe 2 nicht nötig!), könnte der erste Schritt darin bestehen, das (minus3)-fache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung zu addieren und somit x und y aus der zweiten Gleichung zu eliminieren. Dieser Schritt heißt „Elementarumformung" und kann mittels Matrixmultiplikation (von links) dargestellt werden. Finden Sie (z.B. durch Ausprobieren) eine 3x3-Matrix L, die folgende Elementarumformung macht:

$$L \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

(*4 Punkte*)
Bemerkung: Um die Aufgabe zu lösen, sollten Sie nicht versuchen, Gleichungssysteme zu formulieren (das haben wir noch gar nicht behandelt), sondern mit Hilfe des Falk-Schemas durch Ausprobieren darauf kommen, wie die Matrix L aussehen müsste (und wo vor allem die -3 in dieser Matrix stehen muss).

Aufgabe 4a (Alternativ zu 4b):
a) Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt für $A \in \mathbb{R}^{(m\times n)}$ und $B \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$, dass $AB \neq BA$. Die Spur sp(A) einer Matrix A ist definiert als Summe ihrer Diagonalelemente. Zeigen Sie, dass für die Spur einer Matrix „die Kommutativität“ gilt: $sp(AB) = sp(BA)$. (*4 Punkte*)
b) Gegeben seien zwei quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass jeweils die dazu inversen quadratischen Matrizen $A^{-1}, B^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren. Wie lautet dann die Inverse von A^T und die von AB? (*3 Punkte*)

Aufgabe 4b (Alternativ zu 4a): „Didaktikaufgabe – getrennte Abgabe“
Im Schulunterricht sollen auch Beweise behandelt werden, da sie die Struktur der Mathematik charakterisieren. Geben Sie je ein Beispiel für eine Aussage mit entsprechendem Beweis aus einem Schulbuch (Quelle angeben!), die
(a) direkt bewiesen werden kann.
(b) indirekt bewiesen werden kann.
(c) durch vollständige Induktion bewiesen werden kann.
(*7 Punkte*)

II Zusätzliches Material

Wir haben gelernt, dass $\mathbb{R}^2$ die algebraische Struktur eines Körpers hat (die komplexen Zahlen). In der Literatur verwendet man fast ausschließlich die Normalform (a=a_x+ia_y) für die Elemente a, wenn man betonen will, dass man $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als Körper auffasst. Die „Vektorform“ $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ für Elemente aus $\mathbb{R}^2$ benutzt man hingegen dann, wenn man $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum sehen möchte. Wir werden uns auch daran halten. In der Physik nutzt man dann noch gern die Darstellung in Polarkoordinaten (mit Betrag und Argument).

*Wir haben $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum kennengelernt. In Aufgabe 2 betrachten wir nicht die ganze Menge $\mathbb{R}^3$, sondern schränken diese (echt) durch eine Nebenbedingung ein. Wir erhalten eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$, die auch ein Vektorraum ist. Ein solcher Vektorraum heißt „**Untervektorraum zu** $\mathbb{R}^3$“.*

***Das Folgende richtet sich an Physiker**… Sie müssen jedoch erst einmal nachlesen, was „Lineare Abbildungen“ sind und verstehen, dass das „Ableiten einer Funktion“ eine Lineare Abbildung ist:*

*Aus den Stern-Gerlach-Experimenten hat sich ergeben, dass es darauf ankommt, in welcher Reihenfolge man physikalische Größen misst. Wenn man z.B. für ein Teilchen, das sich auf einer 1-dimensionalen x-Achse bewegt, erst den Ort x und dann seinen Impuls p (=Masse * Geschwindigkeit) misst, dann kommt was anderes raus, als wenn man erst den Impuls p und dann den Ort x misst.*

Mathematisch formuliert kommt (grob gesagt) folgendes heraus:

$$xp - px = i\hbar,$$

wobei $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum ist, was einfach eine sehr, sehr kleine Zahl darstellt.

Wer die Definition des Körpers verstanden hat, wird schnell erkennen, der Ort und der Impuls eines Teilchens können (wegen obiger Gleichung) nicht durch Elemente eines Körpers dargestellt werden. Obwohl man sich wünscht, für die x-Koordinate des Teilchens und für seinen Impuls einfach eine reelle Zahl anzugeben (so wie man es in Schulphysik gelernt hat), würde das der Beobachtung des Experiments widersprechen. Der Unterschied zwischen px und xp ist zwar extrem klein (kaum messbar für Gegenstände des alltäglichen Lebens) aber er ist da.

Schrödinger hatte dazu eine Idee. Man fasse x und p als lineare(!) Abbildungen f_x, g_p auf. Das Hintereinanderausführen von Abbildungen ist nämlich nicht-kommutativ. Und zwar sollen f_x und g_p Abbildungen sein, die eine komplexwertige Funktion auf eine andere komplexwertige Funktion abbilden. Schrödinger fand heraus, dass folgende beiden Abbildungen das gewünschte liefern.

Die Abbildung f_x multipliziert die Funktion $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit x, also $f_x(\phi) = x\phi$. Die Abbildung g_p leitet die Funktion $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nach x ab und multipliziert mit $-i\hbar$, also $g_p(\phi) = -i\hbar \frac{d}{dx}\phi$. Und tatsächlich, mit dieser Definition ergibt sich die richtige Vertauschungsrelation $f_x \circ g_p - g_p \circ f_x = i\hbar$.

Probe:

$$\left(f_x \circ g_p - g_p \circ f_x\right)(\phi)$$

$$= -i\hbar\, x \frac{d}{dx}\phi + i\hbar \frac{d}{dx} x\phi$$

$$= -i\hbar\, x \frac{d}{dx}\phi + \left(i\hbar\, x \frac{d}{dx}\phi + i\hbar\, \phi\right)$$

$$= i\hbar\, \phi.$$

(In der dritten Zeile wird die Produktregel der Differentiation angewendet)

Nun, Ort und Impuls eines Teilchens lassen sich also nicht als reelle Zahlen auffassen, sondern als lineare Abbildungen. Aber wie kann man mit solchen Objekten rechnen????

Wie lässt sich jetzt also zum Beispiel die Energie eines Teilchens berechnen?

In der Schule hat man gelernt, dass die Energie E eines Teilchens die Summe aus seiner kinetischen $\frac{1}{2m}p^2$ *(m ist die Masse des Teilchens) und seiner potentiellen Energie* $V(x)$ *(kurz: die potentielle Energie hängt irgendwie vom Ort ab) ist. Also:*

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + V(x).$$

Na gut, dann setzen wir doch einfach die beiden Abbildungen ein… und erhalten

$$E = \frac{1}{2m}g_p \circ g_p + f_{V(x)}.$$

E ist also offensichtlich auch eine Abbildung. Wendet man diese Abbildung auf eine Funktion $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *an, so ergibt sich:*

$$E\phi = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi + V(x)\phi,$$

wobei $\frac{d^2}{dx^2}\phi$ *die zweite Ableitung von* ϕ *ist. Diese Gleichung ist die Schrödinger-Gleichung. Es ist nichts von Welle-Teilchen-Dualismus gesagt worden, nichts von einer Katze, die (weder tot noch lebendig) in einer Kiste sitzt, nichts von verschmierten Elektronen… Die Schödinger-Gleichung ergibt sich „einfach" aus der Tatsache, dass man nach etwas sucht, was mit der Beobachtung aus dem Stern-Gerlach-Versuch verträglich ist. Alles andere ist Philosophie…*