FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo, Weber)

Übungszettel Nr. 4, Abgabe: 14.05.2012 vor der Vorlesung

Lernziel: Analytische Geometrie.

I Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Sie haben in der Vorlesung am 30.4. eine Formel gelernt, mit der man zwei komplexe Zahlen a und b miteinander multipliziert. Nutzt man diese Rechenregel geschickt aus, dann kann man diese Formel verwenden, um Punkte im $\mathbb{R}^2$ um den „Ursprung zu drehen" (Addition der Argumente). Nehmen Sie ein Dreieck mit den Eckpunkten

$$a = \binom{0}{0}, b = \binom{3}{0}, c = \binom{3}{4}$$

und drehen Sie dieses um 30° um den Ursprung. Welche Koordinaten hat das neue Dreieck? Anmerkung: sin(30°)=1/2, cos(30°) = $\sqrt{3}/2$. (*2 Punkte*)

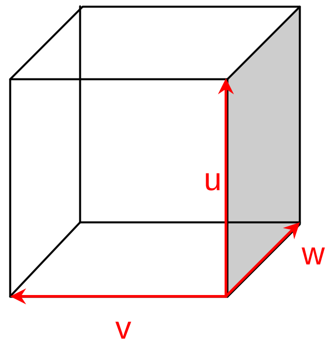
Aufgabe 2: Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an, wenn eine Aussage wahr ist, oder ein Gegenbeispiel, wenn sie falsch ist. Im Folgenden seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$ jeweils nicht „Null(vektoren)"

a) Steht der dreidimensionale Vektor u senkrecht auf v und w, so sind v und w parallel.

b) Steht u senkrecht auf v und w, dann auch auf v+2w.

c) Für gegebene Vektoren u und v gibt es eine reelle Zahl c, so dass v+cu senkrecht auf u steht. (*6 Punkte*)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass zwei Raumdiagonalen eines Würfels (Kantenlänge des Würfels ist größer als Null) nicht rechtwinkelig zueinander sind. Tipp: Stellen Sie die Raumdiagonalen durch entsprechende Linearkombinationen (e=-w+u+v, f=-u+v+w) von den Kanten u,v und w des Würfels dar (die Kanten haben alle die gleichen Beträge und sind jeweils rechtwinkelig zueinander). (*6 Punkte*)



Aufgabe 4a (Alternativ zu 4b):
a) Das dreidimensionale Vektorprodukt ist nicht assoziativ. Die Graßmann-Identität (Hermann Günter Graßmann ist der „Erfinder" der Vektorräume, 1844) für das wiederholte Kreuzprodukt von drei dreidimensionalen Vektoren a,b, und c, lautet

$$a \times (b \times c) = (a^T c)\, b - (a^T b)\, c.$$

Zeigen Sie, dass diese Formel gilt. (*3 Punkte*)

b) Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den folgenden drei Vektoren aufgespannt wird:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Was fällt Ihnen auf? (*3 Punkte*)

Aufgabe 4b (Alternativ zu 4a): „Didaktikaufgabe – getrennte Abgabe"

Diese Aufgabe ist Pflicht für Lehramtsstudierende, die an dem Projekt teilnehmen wollen. Es können jedoch nicht alle Studierende den Vortrag in der Schule später tatsächlich halten. Wir werden auswählen.
a) Bereiten Sie einen etwa 15-minütigen (sehr kurzen) Vortrag zum Thema Skalarprodukt oder zum Thema Vektorprodukt vor. Gehen Sie in diesem Vortrag insbesondere auf die jeweilige Bedeutung für die Analytische Geometrie ein. Der Vortrag soll sich an Schüler richten, die bereits mit der Analytischen Geometrie vertraut sind, also Geraden im 2- und 3-dimensionalen und Ebenen im 3-dimensionalen Raum kennen.

Dieser Vortrag soll anschließend von freiwilligen Teilnehmern an einem Projekttag in einer Berliner Schule gehalten werden. Abzugeben für diese Aufgabe sind entweder Folien, die Tafelanschrift oder eine Ausformulierung des Vortrags.

b) Erstellen Sie 2 Übungsaufgaben, die Schüler, nachdem sie Ihren Vortrag gehört haben, lösen können müssten. Diese Aufgaben sollen ein bestimmtes Ziel verfolgen: Wiederholung, Vertiefung des Stoffes, Entdecken von neuen Eigenschaften, oder ähnliches. Formulieren Sie das Lernziel Ihrer Aufgaben und geben Sie den Erwartungshorizont sowie eine kommentierte Musterlösung an. (*6 Punkte*)

II Zusätzliches Material

Vielen von Ihnen werden vermutlich die Rechenregeln und die Aussagen über Gruppen/Körper/Vektorraum und das Addieren und Multiplizieren etwas „trivial" vorkommen. Als müsse man etwas beweisen, was sowieso schon klar ist. Das liegt daran, dass uns an den Schulen eine gute Intuition für Additionen und

Multiplikationen mit reellen Zahlen vermittelt wurde. Viele Rechenregeln bzw. Verknüpfungstafeln haben wir einfach auswendig lernen müssen und nehmen diese als gegeben hin. Die Leistung der frühen Mathematik bestand darin, verständliche Rechenregeln und Zahlenkonzepte zu formulieren. Dass das für die Mathematiker eine Herausforderung war, wird einem schnell klar, wenn man sich dazu zwingt sich von den „normalen Vorstellungen“ zu befreien und z.B. verzweifelt versucht, die Rechenaufgaben mit alten Zahlensystemen (zum Beispiel den römischen Ziffern) zu lösen. Oder wenn man zwar auf moderne Stellenwertsysteme zurückgreift, aber zum Beispiel alles im 8-er-System rechnen möchte (man erinnere sich daran, dass z.B. die „Familie Simpson“ acht Finger hat und wohlmöglich daher nicht im 10er-System rechnen würde). Oder wenn man die Rechnungen nicht mit Zahlen, sondern mit anderen algebraischen Strukturen lösen möchte. Solche Dinge auszuprobieren, schult den Umgang mit den gelernten Definitionen. Eine Möglichkeit, aus einem Vektorraum zum Beispiel einen anderen (kompliziert wirkenden) Vektorraum zu machen, geht so: Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine ihm zugeordnete lineare Abbildung $f_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_v(x) := v^T x$ (Skalarprodukt). Die Menge dieser Abbildungen wird mit $(\mathbb{R}^n)^*$ bezeichnet und heißt *Dualraum zu* $\mathbb{R}^n$. Man kann sich klar machen, dass $(\mathbb{R}^n)^*$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, indem man $\left(f_{v_1} + f_{v_2}\right)$ und λf_v für $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ geschickt definiert.

Jetzt aber zurück zum „normalen Rechnen“. Folgende Artikel habe ich aus Wikipedia bezogen/geklaut.

Zunächst zwei bedeutende arabische Gelehrte, die wesentlich zu den Rechenverfahren beigetragen haben, die wir in der Vorlesung lernen:

1) Muhammad ibn Musa, Abu Dscha'far al-Chwarizmi (Var. Chwarazmi) محمد بن موسى ابو جعفر الخوارزمي / *Muḥammad b. Mūsā, Abū Ǧaʿfar al-Ḫawārazmī, Var. al-Ḫwārizmī: ʾʿalẖwʾrzmy* (* um 780; † zwischen 835 (?) und 850) war ein persischer Universalgelehrter, Mathematiker, Astronom und Geograph, der den größten Teil seines Lebens in Bagdad verbrachte und dort im „Haus der Weisheit“ tätig war. Von seinem Namen leitet sich der Begriff *Algorithmus* ab. In seinem ersten Werk Kitāb al-Dschamʿ wa-l-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind („Über das Rechnen mit indischen Ziffern“, um 825) stellte al-Chwarizmi die Arbeit mit Dezimalzahlen vor und führte die Ziffer Null (arab.: sifr, daher auch „Ziffer“) aus dem indischen in das arabische Zahlensystem und damit in alle modernen Zahlensysteme ein. Die lateinische Fassung dieser Schrift trug den Titel Algorismi de... („Das Werk des Al-gorismus über...“). Daraus entstand die Bezeichnung „Algorithmus“, mit der generell genau definierte Rechenverfahren gemeint sind. Die arabische Urfassung dieses Buches ist verlorengegangen; es blieb nur in einer lateinischen Übersetzung erhalten. Im Jahr 830 schloss er die Arbeit an dem Buch Kitāb al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-l-muqabala („Rechnen durch Ergänzung und Ausgleich“) ab. Es ist eine Zusammenstellung von Regeln und Beispielen.

2) Abu Kamil (arabisch: كامل ابو), mit vollständigem Namen **Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja**, war ein arabischer Mathematiker. Er lebte von ca. 850 bis 930 n. Chr. und stammte wahrscheinlich aus Ägypten, weitere biographische Angaben sind nicht mehr vorhanden. Er wurde *al-Hasib al-Misri*, „der ägyptische Rechner“, genannt. Er hat allgemeine Beziehungen zwischen Wurzelausdrücken gefunden, die von ihm aufgestellt und später mithilfe der binomischen Formeln bestätigt wurden. „Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst“ enthält sechs verschieden Aufgaben, die zu linearen Gleichungssystemen führen und ganzzahlige oder gebrochene Lösungen erfordern, so genannte Vogelaufgaben.

Jetzt noch ein italienischer Gelehrter, dem viele linear-algebraische Einsichten (auch aus LinA 2) zu verdanken sind:

Der Italiener **Leonardo Fibonacci** folgt um 1192 seinem Vater ins arabisch besetzte Algerien und lernt Abū Kāmils Algebra kennen. 1202 vollendet Fibonacci das *Liber abaci*, in welchem er unter anderem die indischen Ziffern vorstellt und diese in der Tat als »indische Ziffern« und nicht als »arabische Ziffern« bezeichnet.

Und schließlich ein deutscher Mathematiker, dem auffiel, dass die „arabischen Ziffern“ sehr brauchbar sind. Eigentlich fängt die Algebra in Europa so richtig erst nach 1453 an, nachdem Konstantinopel erobert worden war und die entsprechenden Schriften aus dessen Bibliothek in Italien auftauchten (Beginn der Renaissance):

Adam Ries (auch *Adam Ris*, *Adam Rise*, *Adam Ryse*, *Adam Reyeß*, oft fälschlicherweise Adam Riese; * 1492 oder 1493 in Staffelstein, Oberfranken; † 30. März oder 2. April 1559 vermutlich in Annaberg oder Wiesa) war ein deutscher Rechenmeister. Bekannt wurde er durch sein Lehrbuch *Rechenung auff der linihen und federn...*, das bis ins 17. Jahrhundert mindestens 120-mal aufgelegt wurde. Bemerkenswert ist, dass Adam Ries seine Werke nicht – wie damals üblich – in lateinischer, sondern in deutscher Sprache schrieb. Dadurch erreichte er einen großen Leserkreis und konnte darüber hinaus auch zur Vereinheitlichung der deutschen Sprache beitragen.

Adam Ries gilt allgemein als der „Vater des modernen Rechnens”. Er hat mit seinen Werken entscheidend dazu beigetragen, dass die Römische Zahlendarstellung als in der Praxis unhandlich erkannt und weitgehend durch die nach dem Stellenwertsystem strukturierten indisch-arabischen Zahlzeichen ersetzt wurde.