FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo, Weber)

Übungszettel Nr. 5, Abgabe: 21.05.2012 vor der Vorlesung

Lernziel: Lösen linearer Gleichungssysteme.

I Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

a) In einem Stall leben (unversehrte) Schweine und Hühner. Die Tiere haben insgesamt 30 Augen und 44 Beine. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und ermitteln Sie, wie viele Schweine und wie viele Hühner in dem Stall sind.
(2 Punkte)

b) Geben Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Um lineare Gleichungssysteme überhaupt geschickt umformen zu können, benötigen wir die algebraische Struktur eines Körpers. Sie haben bereits kennengelernt, dass es endliche Körper gibt. Hier die Verknüpfungstafeln für einen endlichen Körper mit 4 Elementen:

*	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem über diesem Körper:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Schnitt der folgenden beiden Ebenen:

$$\mathcal{E}_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ und$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Betrachtet werden soll das lineare Gleichungssystem Ax=b mit

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Geben Sie alle rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^3$ an, für die das lineare Gleichungssystem nicht(!) lösbar ist. Tipp: Machen Sie sich zunächst klar, dass Ax eine Ebene darstellt, die durch den Ursprung verläuft. Einen zu dieser Ebene senkrecht stehenden Vektor finden Sie schnell heraus. Der allein reicht aber noch nicht… *(6 Punkte)*

II Zusätzliches Material

Endliche Körper (und die Lösung von Gleichungssystemen bzw. Interpolationsaufgaben über diesen Körpern) sind ein wichtiger Bestandteil der Kodierungstheorie. Wer einmal nachlesen möchte, wie intensiv algebraische Strukturen untersucht werden müssen, um die Nachrichtenkodierung zu verstehen, sollte mal einen Blick ins folgende Kapitel werfen (die allerersten Sätze versteht man ohne Zusammenhang noch nicht, aber dann…)

https://www.fbi.h-da.de/fileadmin/personal/m.braun/codierungstheorie/codierungstheorie_kapitel_4.pdf