FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo/Weber)

Übungszettel 7, Abgabe 11.06.2012

Lernziel: Basiswechsel und affine Koordinaten

Aufgabe 1

Seien ein Vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{w}\| = 1$, sowie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v} + (\mathbf{w}^T\mathbf{v})\mathbf{w}$$

gegeben.

1. Berechnen Sie die Form der Matrix, die f in der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ darstellt. *(2 Punkte)*

2. Mit $n = 3$, beschreiben Sie eine Basis $B_{\mathbf{w}}$ von $\mathbb{R}^3$ so dass die Matrix von f unabhängig von den Koordinaten (w_1, w_2, w_3) ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 2

Seien die Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, -1, -5)_E,\ v_2 = (2, 2, -2)_E,\ v_3 = (0, 1, 2)_E\,,$$

in der Euclidischen Basis gegeben. Definieren Sie ein Basiswechsel durch eine Matrix M, so dass in der neuen Basis, B, die Vektoren als $(\alpha_1, \alpha_2, 0)_B$ geschrieben werden können. *(2 Punkte)*

Wie kann man die ersten zwei Vektoren der Basis geometrisch interpretieren? Wie lässt sich der dritte Vektor erklären? *(2 Punkte)*

Aufgabe 3a

Sei U als Unterraum von $\mathbb{R}^4$ definiert durch die Gleichungen

$$2x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

Berechnen Sie $\dim U$ und eine Basis von U. *(2 Punkte)*

Sei A der affine Raum

$$A = (-1, 0, 0, 1) + U\,.$$

Berechnen Sie eine affine Basis von A, die entsprechenden affinen baryzentrischen Koordinaten von $Q = (-\frac{1}{2}, -5, -1, 3) \in A$.
Geben Sie eine Projektion von A auf die Ebene $\mathbb{R}^2$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3b (alternativ zu 3a)

Sei T ein Dreieck in $\mathbb{R}^3$, durch die Punkte

$$P_1 = (1, 2, 0), P_2 = (1, 1, 1), P_3 = (2, 1 - 1)$$

definiert.
Definieren Sie ein affinen Raum

$$A = P_0 + U$$

durch ein Punkt P_0 und ein Vektorraum U, so daß $P_1, P_2, P_3 \in A$. Welche dimension hat U? (*1 Punkt)*

Die Menge $\{P_1, P_2, P_3\}$ ist eine Basis von A. Geben Sie die baryzentrische Koordinaten der Mittelpunkten jeder Seite. (*2 Punkte)*

Geben Sie eine Abbildung

$$F : A \to \mathbb{R}^2$$

die das Dreieck T auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ projektiert. Ist die Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv? (*2 Punkte)*

Aufgabe 4

Sei P_n der Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten und höchstens Grad n, und sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : & P_n \to P_n \\ & p \to f_p \end{aligned}$$

gegeben, indem das Bild f_p eines Polynomes $p \in P_n$ durch

$$f_p(x) = p(x+1) - p(x)$$

definiert ist.
1. Ist die Abbildung linear? Beschreiben Sie $\ker(f)$. *(2 Punkte)*
2. Für $n = 2$, geben Sie die Matrix A_M von f in der Monombasis $M = \{1, x, x^2\}$ und – durch eine Transformationsmatrix – die Matrix A_N von f in der Basis $N = \{1, 3x - 1, x^2 + 5x + 2\}$. *(4 Punkte)*

-bitte wenden!-

Zusätzliches Material

Basiswechel für Bild-Kompression Basiswechseln sind sehr wichtig in vielen Anwendungen. Einige Beispiele sind die Basiswechsel, die für Bildkompression verwendet werden (JPEG ist eigentlich auch ein Basiswechsel) Folgendes Material habe ich in einer *Video-Vorlesung* von G.Strang gefunden:
http://videolectures.net/mit1806s05_strang_lec31

Man kann ein Bild (2D) als eine große Matrix sehen, wobei jedes Pixel den Wert der Grauintensität (*greyscale*) oder den Werte in Rot-Gelb-Blau Skala entspricht. Für Schwarz-Weiß-Bilder, würden die Werte zwischen 0 und 255 liegen.
Insgesamt hat man für ein Bild der Größe 512×512 somit 512 Vektoren, jeder mit 512 Komponenten. (jeder Vektor ist eine Spalte des Bildes). Dies ist eine Darstellung in der euklidischen Basis, und es braucht eine sehr große Datenmenge (ca. 200000 Zahlen). Eine Kompression durch ein Basiswechsel besteht in der Suche nach einer *gute Basis*, die die Spaltenvektoren mit geringen Anzahl von Elementen approximeren kann. In der Kompression werden danach die kleinsten Koeffizienten (kleiner als eine gewählte Toleranz) *vernachlässigt*
Betrachten wir jetzt den Fall 8×8. Eine sehr bekannte basis is die *Wavelets* Basis. In $\mathbf{R}^8$, die Vektoren haben die Form

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1), \mathbf{w}_2 = (1,1,1,1,-1,-1,-1,-1),\\
&\mathbf{w}_3 = (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1),\\
&\mathbf{w}_4 = (1,-1,0,0,0,0,0,0), \mathbf{w}_5 = (0,0,1,-1,0,0,0,0),\\
&\mathbf{w}_6 = (0,0,0,0,1,-1,0,0), \mathbf{w}_7 = (0,0,0,0,0,0,1,-1),\\
&\mathbf{w}_8 = (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1)
\end{aligned}$$

Die erste Vektoren nennt man *niedriger Frequenzen* (Vektoren die nicht viel ändern), wohingegen die letzten *Hochfrequenzen* heißen (Vektoren dessen Komponenten schnell ändern). Zum Beispiel, $\mathbf{w}_8$ ist ein Vektor (eine Spalte des Bildes) wo nachbaren Pixels immer verschiedene Farben haben. Das passiert doch nicht oft in einem Bild: das heisst, sehr wahrscheinlich wird der Koeffizient von $\mathbf{w}_8$ klein, und kann deswegen verworfen werden.

LU-Zerlegung Basiswechseln werden auch oft in numerische Mathematik gebraucht. Zum Beispiel, wenn man die Lösung lineare Systemen $Ax = b$ sucht.
Oft ist man oft interessiert nur an der Lösung $x = A^{-1}b$, und man möchte nicht die Inverse A^{-1} explizit berechnen.
Die LU-Zerlegung ist die Zerlegung einer quadratischen Matrix A in ein Produkt

$$A = PLU,$$

wo P ist eine *Permutationsmatrix*, die ein Basiswechsel durchführt, L (*auf Englisch: lower triangular*)ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diag-

onale und U eine obere (*upper triangular*) Dreiecksmatrix [1].
Dann, kann man das lineares System so schreiben (genau wie beim Gauß-Eliminationsverfahren):

$$PLUx = b \Rightarrow LUx = P^{-1}b$$

(die Inverse einer Permutationsmatrix ist einfach zu berechnen!). Da L und U Dreieckmatrizen sind, kann man jetzt

$$Ly = c, \text{ und } Ux = y$$

lösen, um x zu berechnen. Mehr Material:
http://www.das-gelbe-rechenbuch.de/download/Lu.pdf

[1] Die Zerlegung kann man auch als $A = PLR$ schreiben, wobei L eine linke Dreiecksmatrix und R eine rechte Dreieckmatrix sind)