FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo/Weber)

Übungszettel 8, Abgabe 18.06.2012

Lernziel: Affine Unterräume, Äquivalenzrelationen, Determinanten

---

Aufgabe 1

Für $\alpha \geq 0$, seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1)^T, \mathbf{v}_2 = (-1,\alpha,-1)^T, \mathbf{v}_3 = (3,1,\alpha)^T$$

gegeben.
1. Berechnen Sie das Volumen des Parallelotops (Spat), das von den drei Vektoren aufgespannt wird. *(2 Punkt).*

2. Für welches α liegen die Vektoren auf einer Ebene? Gibt es einen Wert für α, so dass die Vektoren auf einer Geraden liegen? *(3 Punkte)*

3. Sei $\alpha = 3$, so daß die Vektoren auf eine Ebene liegen. Bestimmen Sie die Normale dieser Ebene, die den Punkt $Q = (-1,3,4)$ enthält. *(3 Punkte)*

Aufgabe 2

Sei $V = P_n$, der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und mit höchstens Grad n. Die Ableitung eines Polynoms

$$\begin{array}{rcl} P_n & \to & P_n \\ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n & \mapsto & p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots n a_n x^{n-1} \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung.
1. Geben Sie die Matrix der Abbildung f in der Monombasis $M_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. (*2 Punkt*).

2. Sei $n = 2$, wir suchen ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, so daß

$$p(1) = 1.3,\ p(2) = 2.5,\ p'(1.3) = -1.$$

Geben Sie das LGS (3×3) das LGS an, das ein solches Polynom definiert, ohne das System zu lösen. (*3 Punkte*).

Aufgabe 3

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Berechen Sie die Determinanten $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$, $\det\left(\frac{1}{2}A\right)$.
(4 Punkte)

Aufgabe 4

1. Sei M die Menge allen Geraden in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie dass die Relation

$$\text{"}\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2 \text{ wenn } \mathcal{G}_1 \text{ und } \mathcal{G}_2 \text{ parallel sind"}$$

eine Äquivalenzrelation in M ist. *(3 Punkte)*