FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 10, Abgabe: 12.1.2011 um 12 Uhr

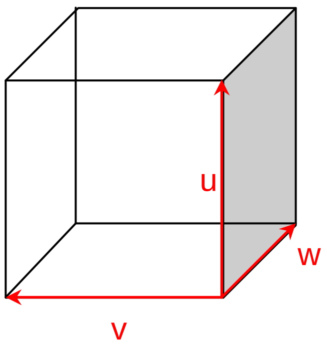
Lernziel: Anwendungen der linearen Algebra (Partialbruchzerlegung, analytische Geometrie). Dualräume.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{5x^2-4x+30}{x^3+3x^2-10x} \in span\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x+5},\frac{1}{x-2}\right).$$

Geben Sie dazu die entsprechenden reellwertigen Linearfaktoren an (also die „Koordinaten" des Vektors). (*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass zwei Raumdiagonalen eines Würfels (Kantenlänge des Würfels ist größer als Null) nicht rechtwinkelig zueinander sind. Tipp: Stellen Sie die Raumdiagonalen durch entsprechende Linearkombinationen (e=-w+u+v, f=-u+v+w) von den Kanten u,v und w des Würfels dar (die Kanten haben alle die gleichen Beträge und sind jeweils rechtwinkelig zueinander). (*4 Punkte*)



Aufgabe 3: Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine ihm zugeordnete lineare Abbildung $f_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_v(x) := v^T x$. Die Menge dieser Abbildungen wird mit $(\mathbb{R}^n)^*$ bezeichnet und heißt *Dualraum zu* $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n)^*$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Wie sind also $\left(f_{v_1}+f_{v_2}\right)$ und λf_v für $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert? (*4 Punkte*)
b) Zeigen Sie: Ist $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, dann ist $f_{v_1}, f_{v_2}, \dots, f_{v_n}$ eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$. (*4 Punkte*)

Bemerkung: *Wir hatten bereits gelernt, dass die Menge der reellwertigen Funktionen einen Vektorraum bilden. Die linearen Abbildungen $f_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind eine Teilmenge hiervon. Lineare Abbildungen von einem K-Vektorraum nach K heißen Linearformen.*

Aufgabe 4 (didaktische Aufgabe, getrennte Abgabe): Es gibt verschiedene Museen, die sich mit der spielerischen Heranführung von Kindern und Jugendlichen an naturwissenschaftliche und mathematische Themen beschäftigen. Zu erwähnen ist für die Mathematik sicherlich das „Mathematikum“ in Gießen, das auch eine Wanderausstellung besitzt. In Berlin gibt es z.B. das (thematisch offenere) „Labyrinth Kindermuseum“ und in Potsdam das (naturwissenschaftlich ausgerichtete) „Exploratorium“. Entwerfen Sie ein Exponat für ein solches Museum, das für Kinder im Grundschulalter geeignet ist und als Thema „Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen“ behandelt. (*4 Punkte*)