FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 12, Abgabe: 26.1.2011 um 12 Uhr

Lernziel: Determinanten berechnen. LGS mit endlichen Körpern lösen.

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds (so heißt der „Hyperspat" wissenschaftlich), der von den folgenden vier vierdimensionalen Vektoren aufgespannt wird: (*4 Punkte*)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die „Vandermonde-Matrix" folgende Determinante hat, wobei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: (*6 Punkte*)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \dots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Lassen Sie sich bei der Lösung der Aufgabe gern durch Beweise in der Literatur inspirieren (z.B. durch Beutelspacher).

Bemerkung: *Ein lineares (n x n)-Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht Null ist (Cramersche Regel). Auf dem achten Übungszettel haben Sie in Aufgabe 2 ein lineares Gleichungssystem gelöst, um zu gegebenen „Stützstellen"* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *und entsprechenden Funktionswerten ein „interpolierendes Polynom" vom Grad n-1 zu finden. Nun gibt es in der Linearen Algebra die wichtige Erkenntnis, dass diese „Interpolationsaufgabe" bereits dann eindeutig lösbar ist, wenn die Stützstellen alle paarweise verschieden sind. Bewiesen wird das mit der Vandermonde-Determinante, die nach obiger Rechnung in diesem Fall ungleich Null ist.*

Aufgabe 3: Geben Sie alle (drei) Lösungsvektoren des LGS im Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an: (*6 Punkte*)

$$\begin{pmatrix} [1] & [1] & [0] \\ [2] & [0] & [1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2] \\ [0] \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (didaktische Aufgabe, getrennte Abgabe):

Versetzen Sie sich in die Rolle eines Lehrers (Tutors), der einen Lösungsvorschlag zu der folgenden Aufgabe zur Bewertung von den Studierenden erhalten hat. Erstellen Sie eine Musterlösung zu der Aufgabe und korrigieren Sie den Lösungsvorschlag, indem Sie genau identifizieren, an welchen Stellen die Lösung ungenau oder nicht korrekt ist? Ist jede Umformung ausreichend erklärt? (*4 Punkte*)

Vorausgesetzt werden darf dabei, dass in der Vorlesung der Satz $\det(A) = \det(A^T)$ behandelt wurde.

AUFGABE: Eine quadratische Matrix A heißt „schiefsymmetrisch“, wenn $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass die Determinante einer schiefsymmetrischen (n x n)-Matrix A mit ungeradem n stets Null ist. Bemerkung: Um das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in Matrixschreibweise zu formulieren (siehe Definitionen-Zettel Nr. 7), benutzt man eine schiefsymmetrische Matrix.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Die Matrix aus dem Definitionen-Zettel Nr.7 lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist schiefsymmetrisch und hat eine ungerade Zeilen/Spalten-Zahl. Für diese Matrix gilt: $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$. Um von der Matrix -A zur Matrix A zu kommen, muss jede Spalte von -A mit (-1) multipliziert werden. Also: $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$. Da also für diese Matrix schließlich $\det(A) = -\det(A)$ gilt, ist die Determinante Null.