FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Übungszettel Nr. 7, Abgabe: 8.12.2010 um 12 Uhr

Lernziel: Lineare Abbildungen. Kern und Bild.

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den folgenden drei Vektoren aufgespannt wird:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Was fällt Ihnen auf? (*2 Punkte*)

b) Wenden Sie den Gaußalgorithmus an, um folgendes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ist dieses Gleichungssystem lösbar? Ist es eindeutig lösbar? Bringen Sie das Resultat von b) in Beziehung zu der Antwort aus a). (*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Sei P^3 die Menge der Polynome mit reellwertigen Koeffizienten bis (höchstens) zum Grad 3.

a) Wie ist die Addition von zwei Polynomen in P^3 und die Multiplikation eines Polynoms mit einem Skalar definiert, so dass P^3 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$) ist? Nennen Sie dazu einfach die Rechenregeln für die Koeffizienten der Polynome $a = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ und $b = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. (*1 Punkt*)

b) Die Ableitung eines Polynoms aus P^3 nach x ergibt wieder ein Polynom aus P^3. Also ist die Ableitung eine Abbildung $\delta x: P^3 \to P^3$. Zeigen Sie, dass δx eine lineare Abbildung ist. (4 *Punkte*)

Aufgabe 3: a) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*2 Punkte*)

b) Statt ein Polynom in Aufgabe 2) in der Form $a = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ zu schreiben, könnte man auch einfach die Koeffizienten „als Vektor formulieren“:

$$a = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Das ist nur eine andere Schreibweise für die Elemente aus P^3. Zeigen Sie, dass Aa die Ableitung des Polynoms a nach x ergibt, wobei A die Matrix aus 3)a) ist. Zeigen Sie, dass AAa die zweite Ableitung des Polynoms a nach x und AAAa die dritte Ableitung von a nach x ergibt. (*3 Punkte*)

c) Gesucht sind alle Polynome a aus P^3, deren Ableitung $2x^2 + 2x + 1$ ist. Geben Sie also alle Lösungen (d.h. die allgemeine Lösung) des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der aus dem Kern der Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ stammt. Welchen Winkel bildet der Vektor a mit den Zeilen der Matrix M? Bestimmen Sie dazu, welchen Wert das folgende Skalarprodukt liefert:

$$(M_{k1} \quad \ldots \quad M_{kn}) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

wobei $(M_{k1} \quad \ldots \quad M_{kn})$ die k-te Zeile von M ist. (*2 Punkte*)

Bemerkung: *Die Aufgabe 4 liefert ein einfaches Verfahren, wie man den Kern einer 2x3-Matrix M bestimmen kann. Die Zeilen dieser Matrix M fasst man dabei als zwei dreidimensionale Vektoren a und b auf. Von diesen beiden Vektoren bildet man das Vektorprodukt a x b, das einen dreidimensionalen Vektor c liefert, der senkrecht auf a und b steht. Der Kern der Matrix besteht aus allen skalaren Vielfachen von c (sofern a und b nicht parallel sind).*