FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra I, Weber/Caiazzo)

Übungszettel 1
Mengen und Abbildungen (VL 1),
Verknüpfung von Aussagen (VL 2)

Lernziele: Die Begriffe der Mengenlehre und die Begriffe "Abbildung", "injektiv", "surjektiv" und "bijektiv" sollen vertieft werden; es soll das logische Verknpfen von Aussagen trainiert werden.

Abgabetermin: 23.04

Ü1: Relationen und Abbildungen Seien die folgenden Relationen gegeben:

a. Jedem Menschen wird sein Geburtstag zugeordnet

b. Jeder Stadt wird die Anzahl der Einwohner zugeordnet

c. Jedem Menschen werden alle seine Verwandten zugeordnet

d. Jeder Zahl $x \in \mathbb{N}$ ($0 \notin \mathbb{N}$) wird ihr Kehrwert $\frac{1}{x}$ zugeordnet

1. Definieren Sie für die Relationen den Definitionsbereich (wählen Sie dabei aus folgenden Alternativen: $M_1 =$ Menge der Menschen, $M_2 =$ Tage des Jahres, $M_3 = \mathbb{N}$, $M_4 =$Wochentage, $M_5 = \mathbb{Q}$, $M_6=$ Menge der Städte) (2pt)
2. Welche der Relationen sind Abbildungen? (2pt)
Sind diese Abbildungen surjektiv, injektiv, bijektiv? (2pt)

Ü2: Abbildungen Betrachten Sie die Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^3 + x^2,$$

$$f_2 : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^3 + x^2$$

wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist.
1. Sind diese Abbildungen surjektiv, injektiv, bijektiv? (3pt)
2. Was sind die Bilder von f_1 und f_2?
Was sind die Urbilder von 0? (2pt)

Ü3 Verknüpfungstafeln
1. Füllen Sie die Verknüpfungstafeln für

$$\begin{aligned} &a.\ (A \vee B) \to \neg C, \\ &b.\ (A \to B) \to (\neg C \to A). \end{aligned}$$

aus (2pt).
2. Zeigen Sie dass

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \text{ (3pt)}$$

Ü4a Unendliche Mengen (Alternativ zu 4b) Betrachten Sie die Mengen

$$2\mathbb{Z} = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}, 5\mathbb{Z} = \{5k,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

1. Geben Sie die Mengen

$$2\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$$

an. (2pt)
2. Definieren Sie zwei injektive Abbildungen
$f_1 : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $f_2 : \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$. (2 pt)

Ü4b Didaktik (Alternativ zu 4a) Mathematisch Argumentieren und Kommunizieren sind seit den Bildungsstandars Mathematik [1] zwei prozessbezogene Kompetenzen, deren Erwerb im Unterricht gefödert werden soll.
Entwerfen Sie eine Aufgabe, zur Förderung des logischen Argumentierens und des Kommunizierens von logischen Schlussfolgerungen, erstellen Sie eine kommentierte Musterlösung und arbeiten Sie heraus, wie das Lösen der Aufgabe den Erwerb der Kompetenzen fördern kann. (4pt)
Bitte: Didaktik Aufgaben getrennt abgeben!

Zusätzliches Material

Es gibt mehrere Arten von "unendlich" in der Mengenlehre. So kann man z.B. zwischen **abzhlbaren** und **berabzhlbaren** Mengen unterscheiden:
- http://de.wikipedia.org/wiki/Abzählbarkeit
G. Cantor war der Begründer der Mengenlehre. Zwei berühmte Sätze:
- http://en.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Cantor
(eine Aussage über der Unterschied zwischen A und $\mathcal{P}(A)$)

- http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Bernstein-Schr%C3%B6der-Theorem
(eine Aussage über die Mächtigkeiten zweier Mengen)
Cantor-Diagonalisierung:
- http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Diagonalisierung

Mit der Cantor-Bernstein Satz kann man zeigen, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Dafür braucht man eine injiektive Abbildung zwischen $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$:

$$\frac{p}{q} \to 2^p 3^q\,.$$

George Boole:
http://de.wikipedia.org/wiki/George_Boole
Logik von Schaltungen (logische Schaltung)
http://www.allaboutcircuits.com/vol_4/chpt_7/1.html

[1] siehe http://www.berlin.de/... S. 10 ff.