Übungszettel 2:
Beweisentechnik (VL 3), Gruppen und Körper (VL 4)

Lernziele: Grundlegende Mathematische Strukturen
Abgabetermin: 30.04

Ü1: Logik Folgende Voraussetzungen (1)-(10) seien erfüllt:

1. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
2. Jedes Tier, das gern in den Mond guckt, ist als Schoßtier geeignet.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Wege.
4. Nur Tiere, die nachts umherschweifen, sind Fleischfresser.
5. Jede Katze tötet Mäuse.
6. Nur die Tiere in diesem Haus mögen mich leiden.
7. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet.
8. Nur Fleischfresser töten Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht leiden können.
10. Tiere, die nachts umherschweifen, gucken gerne in den Mond.

Folgern Sie hieraus: Ich gehe Kängurus aus dem Wege (5pt)

Ü2: Quantoren Folgenden Aussagen seien gegeben:

$$(a) : \exists x \in \mathbb{Z} \mid \forall y \in \mathbb{Z}, y + x = 0$$

$$(b) : \forall y \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} \mid y + x = 0$$

Zeigen Sie dass (a) und (b) unterschiedlich sind (3 pt)
(Hinweis: zeigen Sie dass (b) immer wahr ist, weil (a) nicht wahr sein kann)

Ü3: Minimale Körper Zeigen Sie, dass die Menge {0,1} (alternativ {F,W}) zusammen mit der Verknüpfung $\dot{\vee}$ als *Addition* und $\wedge$ als *Multiplikation* einen Körper bilden (3pt).
Konstruieren Sie einen Körper mit drei Elementen. Zeigen Sie, dass es sich bei Ihrer Konstruktion wirklich um einen Körper handelt. (3pt).

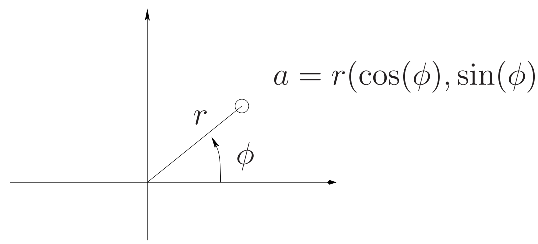

Figure 1: Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten.

Ü4: Untergruppen Seien die zwei Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, \cdot)$ gegeben. Bezeichnet die Teilmenge $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eine Untergruppe? (2pt)

Ü5a: Komplexen Zahlen (Alternativ zur 5b) Eine weitere Darstellung der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist mit *Polarkoordinaten*:

$$a \in \mathbb{C}, a = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix},$$

wobei r als *Betrag* und ϕ als *Argument* bezeichnet werden.
Zeigen Sie dass $(\mathbb{C}/\{0\}, \cdot)$, mit

$$r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot s \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} = rs \begin{pmatrix} \cos(\phi + \psi) \\ \sin(\phi + \psi) \end{pmatrix}$$

eine Gruppe ist (3pt).
Definieren Sie die Teilmenge der komplexen Zahlen mit Betrag 1, und zeigen Sie dass sie eine Untergruppe von $(\mathbb{C}/\{0\}, \cdot)$ ist. (1pt)

Ü5b: Didaktik (Alternativ zur 5a)
Die Begriffe Gruppe und Körper werden so wie in der Universität natürlich nicht in der Schule eingeführt. Allerdings wird auch im Unterricht ständig mit Gruppen und Körper umgegangen, z.B. mit $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Finden Sie Beispiele für Gruppen und Körper, die auch Schüler verstehen k önnen und zeigen Sie kurz, dass es sich tatsächlich um einen Körper, bzw. eine Gruppe handelt. (4pt)
Bitte Didaktik Aufgaben getrennt (in Didaktik-Box) abgeben!

Zusätzliches Material

Évariste Galois: http://de.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois
Galois war ein französischer Mathematiker, einer der wichtigsten Entwickler der Gruppentheorie (ein Teilgebiet, die Galoistheorie, ist nach ihm genannt). Er war der erster der das Wort *Gruppe* (für Permutationsgruppe, siehe unten) benutzte.
Unter den bekanntesten Ergebnisse seiner Theorie:
(i) die Unmöglichkeit, eine algebraische Gleichung des fünften Grades in Radikale

allgemein zu lösen,
(ii) die Unmöglichkeit, ein regelmäßiges Siebeneck mit Zirkel und Lineal exakt zu konstruieren.

Permutationsgruppe. Sei $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Eine bijektive Funktion

$$\sigma : A_n \to A_n$$

wird als *Permutation* bezeichnet.
Permutationen werden auch oft so definiert:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen, dass die Menge allen Permutationen von A_n, mit der Verknüpfung

$$\sigma \circ \tau(a) = \sigma(\tau(a))$$

eine Gruppe bildet.

Zyklische Gruppe. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, und sei $a \in G$ ein Element. Man bezeichnet mit

$$(a) = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Mal), *die minimale Untergruppe*, die a entählt.
Eine Gruppe ist *zyklisch*, wenn sie ein Element a enthält, sodass jedes Element eine Potenz von a ist. a heisst dann *Erzeuger* der Gruppe G.

Gruppenhomomorphismus. Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen. Eine Funktion

$$f : G \to H$$

heisst *Gruppenhomomorphismus* wenn es gilt:

$$\forall x, y \in G : \; f(x \circ y) = f(x) * f(y). \tag{1}$$

Das bedeutet, dass ein Homomorphismus (von griechisch, *homo*, gleich, und *morph*, Form) die Struktur einer Gruppe erhält.
Aus (1) folgt, dass das Bild des neutrales Element in G das neutrales Element in H ist:

$$f(e_G) = e_H.$$

Weiterhin, dass f Inverse auf Inverse abbildet, e.g.

$$\forall x \in G : f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

Beispiel. Man kann zeigen dass

$$f(x) = \exp(x)$$

ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, *)$ ist.
Ein *Gruppenisomorphismum* ist ein bijektiver Homomorphismus.