FU Berlin: SoSe 12 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Caiazzo/Weber)

Übungszettel 9, Abgabe 25.06.2012

Lernziel: Determinanten, LGS und Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $B \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, mit

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

und $f : \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}^{2\times 2}$ die durch $f(A) = BA$ definierte Abbildung.
1. Bestimmen Sie die Matrix von f in der Basis

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{K}^{2\times 2}$. *(3 Punkte)*

2. Zeigen Sie: $\det f = (\det B^2)$. *(2 Punkte)*

3. Wann ist f injektiv? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2

Seien der Punkt $P_0 = (0, 1, 0)$ sowie die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Die affine Unterraum (*Ebene*)

$$\mathcal{E} = P_0 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

entspricht der Lösungmenge eines LGS. Geben Sie dieses System. *(3 Punkte)*
(Typ: Bestimmen Sie zu erst die Menge der Vektoren, die orthogonale zu $\mathbf{v}_1$ *und* $\mathbf{v}_2$ *sind)*

Aufgabe 3

Sei P_n, der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und mit höchstens Grad n. Sei die Ableitung eines Polynoms die durch

$$\begin{array}{rcl} P_n & \to & P_n \\ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n & \mapsto & p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots n a_n x^{n-1} \end{array}$$

definiert Abbildung.

1. Zeigen Sie dass die Relation

$$p(x) \sim q(x) \Leftrightarrow p'(x) = q'(x)$$

eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklasse

$$[p] = \{q \in P_n \mid q \sim p\}$$

eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. *(2 Punkte)*

2. Bestimmen Sie $\ker f$ und beschreiben Sie die Quotientmenge

$$P_n/_{\sim} = \{[p], p \in P_n\}$$

Welche beziehung gibt es zwischen die Klasse eines Polynoms p und $\ker f$?
(2 Punkte)

Aufgabe 4

1. Zeigen Sie dass die 3 Ebenen

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_1 : x + z = 1 \\ &\mathcal{E}_2 : \ -x + y - z = 2 \\ &\mathcal{E}_3 : 2x + 2y = 0 \end{aligned}$$

sich genau in einem Punkt schneiden. *(3 Punkte)*
2. Berechnen Sie diesen Punkt. *(3 Punkte)*