Musterlösung zu Übung 10 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

Gesucht sind die reellen Linearfaktoren a,b und c, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{5x^2-4x+30}{x^3+3x^2-10x}=a\cdot\frac{1}{x}+b\cdot\frac{1}{x+5}+c\cdot\frac{1}{x-2}$$

Dazu erweitern wir zunächst und multiplizieren aus:

$$=\frac{a(x+5)(x-2)+b(x(x-2))+c(x(x+5))}{x^3+3x^2-10x}=\frac{ax^2+3ax-10a+bx^2-2bx+cx^2+5cx}{x^3+3x^2-10x}$$

Nun sortieren wir ein wenig um und vergleichen die Zähler, um ein LGS erzeugen zu können:

$$=\frac{(a+b+c)x^2+(3a-2b+5c)x-10a}{x^2+3x^2-10x}\Leftrightarrow a+b+c=5\wedge 3a-2b+5c=-4\wedge -10a=30$$

Letzteres ist unser zu lösendes LGS und so erhalten wir:

$$a=-3\wedge b=5\wedge c=3$$

Demnach gilt tatsächlich $\frac{5x^2-4x+30}{x^2+3x^2-10x}\in span\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x+5},\frac{1}{x-2}\right)$, und die Funktion lässt sich demnach auch schreiben als $\begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B:=\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{x+5},\frac{1}{x-2}\right\}$.

Aufgabe 2:

Um zu zeigen, dass die Raumdiagonalen e und f nicht rechtwinklig zueinander stehen, versuchen wir zu zeigen, dass das Skalarprodukt von e und f nicht 0 ist,

$$\begin{aligned} e^T f=(-w+u+v)^T(-u+v+w) &\overset{Linearität}{=} w^T u-w^T v-w^T w-u^T u+u^T v+u^T w-v^T u+v^T v+v^T w \\ &\overset{Symmetrie}{=} 2*(w^T u)-u^T u+v^T v-w^T w \overset{'Würfel'}{=} -|u|^2\neq 0\end{aligned}$$

Hier wurde jetzt insbesondere verwendet, dass stets gilt: $a^T a=|a|^2$ und, dass die „Kantenvektoren" im Würfel gleichlang sind und senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 3:

a) Schauen wir uns zuerst an, wie die Addition und skalare Multiplikation aussehen müssen:

$$(f_{v_1}+f_{v_2})(x):=f_{v_1}(x)+f_{v_2}(x)=v_1^T x+v_2^T x=(v_1+v_2)^T x=f_{v_1+v_2}(x)$$
$$(\lambda\cdot f_v)(x):=\lambda\cdot f_v(x)=\lambda\cdot(v^T x)=(\lambda\cdot v)^T x=f_{\lambda\cdot v}(x)$$

Im Folgenden verwenden wir insbesondere einige Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$. Dieser ist ein Vektorraum, erfüllt also selbst (V1),(V2) und (V3). Dabei sei das neutrale Element des $\mathbb{R}^n$, also der n-dimensionale Nullvektor einfach mit 0 bezeichnet, das additiv inverse Element zu einem beliebigen $v\in\mathbb{R}^n$ mit $-v$. Der zugrunde liegende Körper ist $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit dem multiplikativ neutralen Element 1. Die auftretenden $v_i, i\in\mathbb{N}$ seien alle aus dem $\mathbb{R}^n$, die $\lambda_i, i\in\mathbb{N}$ aus $\mathbb{R}$.

Nun also zu den Vektorraumaxiomen:

(V1): $(f_0+f_v)(x)=f_{0+v}(x)=f_v(x)$, also ist f_0 (links-)neutral.

$(f_{-v}+f_v)(x)=f_{-v+v}(x)=f_0(x)$, also ist f_{-v} (links-)invers zu f_v.

$$((f_{v_1}+f_{v_2})+f_{v_3})(x)=(f_{v_1+v_2}+f_{v_3})(x)=f_{v_1+v_2+v_3}(x)=(f_{v_1}+(f_{v_2+v_3}))(x)=(f_{v_1}+(f_{v_2}+f_{v_3}))(x)$$

$$(f_{v_1}+f_{v_2})(x)=f_{v_1+v_2}(x)=f_{v_2+v_1}(x)=(f_{v_1}+f_{v_2})(x)$$

(V2): $(1\cdot f_v)(x)=f_{1\cdot v}(x)=f_v(x)$

$$(\lambda_1(\lambda_2 f_v))(x)=(\lambda_1 f_{\lambda_2 v})(x)=f_{\lambda_1\lambda_2 v}(x)=((\lambda_1\lambda_2)f_v)(x)$$

(V3): $(\lambda(f_{v_1}+f_{v_2}))(x)=(\lambda f_{v_1+v_2})(x)=f_{\lambda(v_1+v_2)}(x)=f_{\lambda v_1+\lambda v_2}(x)=(f_{\lambda v_1}+f_{\lambda v_2})(x)=(\lambda f_{v_1}+\lambda f_{v_2})(x)$

$$((\lambda_1+\lambda_2)f_v)(x)=f_{(\lambda_1+\lambda_2)v}(x)=f_{\lambda_1 v+\lambda_2 v}(x)=(f_{\lambda_1 v}+f_{\lambda_2 v})(x)=(\lambda_1 f_v+\lambda_2 f_v)(x)$$

Wir sehen also, dass die VR-Axiome allesamt erfüllt werden. Wem diese Darstellung nicht klar genug ist, der kann auch jeden Schritt auf das Skalarprodukt zurückführen.

b) Sei $B:=\{v_{1,}\dots,v_n\}$ Basis des $\mathbb{R}^n$. Wir wollen nun zwei Dinge zeigen, nämlich dass dann

(i) $\{f_{v_1},\dots,f_{v_1}\}$ ist linear unabhängiges System

(ii) $\{f_{v_1},\dots,f_{v_2}\}$ ist Erzeugendensystem von $(\mathbb{R}^n)^*$

(i) zz.: $f_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{v_i}\Rightarrow\lambda_i=0,\ \ i=1,\dots,n$

$$f_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{v_i}\Rightarrow f_0=f_{\sum_{i=i}^{n}\lambda_i v_i}\overset{(1)}{\Rightarrow}0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\overset{(2)}{\Rightarrow}\lambda_i=0,\ \ i=1,\dots,n$$

An der Stelle (1) haben wir verwendet, dass das Skalarprodukt eines festen Vektors $v\in\mathbb{R}^n$ mit einem $x\in\mathbb{R}^n$ nur dann für alle x 0 wird, wenn v der Nullvektor ist. Dies lässt sich leicht beweisen. An Stelle (2) wurde verwendet, dass B eine Basis ist.

(ii) zz.: $\forall f_v\in(\mathbb{R}^n)^*\,\exists\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}: f_v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{v_i}$

$$f_v=f_{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{v_i}$$

Dieser Schritt ging nach den vorherigen sehr schnell und leicht, konnten wir doch einfach die Definitionen aus a) sowie die Tatsache, dass B Basis ist verwenden.