Musterlösung zu Übung 4 der VL LinA I (LA)
- Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

a) Drehen wir das Dreieck um 60° um den Ursprung, so drehen wir die Ortsvektoren der Punkte B und C, da der Punkt A selbst ja bereits der Ursprung ist. Dazu multiplizieren wir nach Aufgabe 4 auf Zettel 3 mit einem Vektor mit der Länge 1 und dem Winkel 60°. So erhalten wir:

$$b'=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}cos60°\\sin60°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0,5\\0,5\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5\\1,5\sqrt{3}\end{pmatrix}$$ sowie

$$c'=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}cos60°\\sin60°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0,5\\0,5\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5-2\sqrt{3}\\2+1,5\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Eine alternative Rechnung mithilfe von Drehmatrizen führt zur selben Lösung.

b) In der Darstellung in $\mathbb{R}^2$ müssen wir uns insbesondere an die Multiplikationsregeln erinnern! Dann ließt sich die Gleichung als:

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Nach Anwendung der Rechenregeln erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}a_x^2-a_y^2+2a_x+2\\2a_x a_y+2a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$,was wir als Gleichungssystem auffassen können (I, II)!

Aus der zweiten Gleichung lesen wir ab, dass entweder $a_x=-1$ oder $a_y=0$ sein muss. Der zweite Fall liefert aber keine Lösungen für das Gleichungssystem, da nach Einsetzen in der ersten Gleichung $a_x^2+2a_x+2=0$ stünde, was in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist! Einsetzen des ersten Falles in die erste Gleichung liefert schnell: $a_y^2=1$ und somit $a_y=1\vee a_y=-1$. Als Lösungen des Gleichungssystems bekommen wir demnach:

$$a=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\vee a=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Nachzuweisen sind streng genommen all die (drei) Vektorraumaxiome, die auf dem Definitionszettel stehen. Einige davon können wir aber sehr schnell abhandeln, da wir wissen, dass ($\mathbb{R}$,+,·) und ($\mathbb{Q}$,+,·) jeweils Körper bilden.

(V1) Die Addition ist wie bekannt definiert. Dann gilt: ($\mathbb{R}$,+) ist abelsche Gruppe.
(V2) Die Multiplikation von $\mathbb{Q}x\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist bekanntermaßen abgeschlossen und assoziativ. Und außerdem gilt: $\forall r\in\mathbb{R}:1*r=r$.
(V3) Die Distributivgesetze gelten ebenfalls wie gewohnt.

=> Es handelt sich tatsächlich um einen Vektorraum.

b) Hier führen wir (V2) zu einem Widerspruch, indem wir zeigen, dass die Multiplikation von $\mathbb{R} x \mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen ist. Man zeige einfach ein Gegenbeispiel, wie z.B.:

$$\pi \in \mathbb{R} * 1 \in \mathbb{Q} = \pi \notin \mathbb{Q}$$

=> Hierbei handelt es sich folglich nicht um einen Vektorraum.

c) Da wir in der Vorlesung schon gezeigt haben, dass $\mathbb{R}^3$ über dem Körper der reellen Zahlen mit den bekannten Verknüpfungen einen Vektorraum bildet und die Menge aller Lösungen mit Sicherheit eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ bildet, prüfen wir das Unterraumkriterium nach:

Sei V K-VR und $U \subset V$, dann ist U Untervektorraum, gdw:

i. $U \neq \emptyset$
ii. $\forall u, v \in U : u + v \in U$
iii. $\forall u \in U, k \in K : k * u \in U$

zu (i): Offenbar löst $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das LGS => $U \neq \emptyset$

zu (ii): Seien $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Lösungen des LGS. Dann gilt aufgrund der Distributivität der Matrixmultiplikation: $A * \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + A * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Summe zweier Lösungen löst also wie bewiesen auch das LGS!

Zu (iii): Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Lösung und $k \in \mathbb{R}$, dann gilt: $A * \begin{pmatrix} k * a_1 \\ k * a_2 \\ k * a_3 \end{pmatrix} = k * A * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = k * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Wie wir sehen löst auch jedes "Vielfache" einer Lösung das LGS. Damit sind alle drei Bedingungen erfüllt und die Menge aller Lösungen des LGS bildet einen Unterraum!

<u>Aufgabe 3:</u>

Wir stellen schnell fest, dass, damit die erste und dritte Zeile der gegebenen Matrix erhalten bleiben, die erste und dritte Zeile der Matrix L denen der Einheitsmatrix entsprechen müssen. Damit die zweite Zeile durch die Summe des (-4)-fachen der ersten Zeile und des 1-fachen der zweiten Zeile ersetzt wird, muss jeweils der "obere" Eintrag mit (-4) und der "mittlere" mit 1 multipliziert werden. Daraus folgt für L als eine(!) mögliche Lösung der gegebenen Gleichung:

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wie viele von euch beim Lösen verschieden vieler linearer Gleichungen festgestellt haben, gibt es in diesem besonderen Fall durchaus noch andere Matrizen, die die gegebene Gleichung erfüllen. Die hier beschriebene Matrix L ist aber diejenige, die unabhängig von der "Ausgangsmatrix" A die geforderte Zeilenumformung ausführt und wird auch "Elementarmatrix" genannt.