Musterlösung zu Übung 5 der VL LinA I (LA)
– Dominik Puhst-

Bei allen Aufgaben verwende ich, dass der Nullvektor und ein beliebiger Vektor jeden(!) Winkel einschließen! Hierzu verweise ich auf die Diskussion im Forum zur Veranstaltung.

Aufgabe 1:

Wir berechnen die Matrixprodukte nach dem Falk-Schema, wobei bei $A \in \mathbb{R}^{nxm}, B \in \mathbb{R}^{mxl}$ gilt: $A * B = C \in \mathbb{R}^{nxl}$ sowie $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} * b_{rj}$. Damit können wir die Produkte einfach berechnen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21a & 15b & 18c \\ 14d & 10e & 12f \\ 28g & 20h & 24i \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Hier verwenden wir die bekannte Formel $\frac{a^T * b}{|a| * |b|} = \cos(\phi)$, mit ϕ als Winkel zwischen a und b. Außerdem verwenden wir, dass $\cos(120°) = -0{,}5$ gilt. Nun rechnen wir drauf los:

$$\frac{a^T * b}{|a| * |b|} = \frac{xz + xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ , falls } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$$

Wegen der Bedingung x+y+z=0 ersetzen wir z.B. z durch (-x-y):

$$\frac{xz + xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x(-x-y) + xy + y(-x-y)}{x^2 + y^2 + (-x-y)^2} = \frac{-x^2 - xy - y^2}{2x^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{(-1) * (x^2 + xy + y^2)}{2 * (x^2 + xy + y^2)} = -0{,}5 = \cos(120°)$$

Alternativ hätte man natürlich auch x durch (-y-z) oder y durch (-x-z) ersetzen können.
Für den Fall $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ argumentieren wir, dass wir den Winkel zwischen dem Nullvektor und dem Nullvektor suchen, der nach der Eingangsbemerkung ja beliebig, insbesondere also auch 120°, ist.

Aufgabe 3:

Vorbemerkung: Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, genau dann wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

a) Falsch! Wir geben ein Gegenbeispiel an: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Offensichtlich (wem das nicht offensichtlich ist, der möge es nachrechnen) steht u senkrecht auf v und w, doch v und w sind alles andere als parallel.

b) Richtig! Hier gibt es zwei Möglichkeiten der Begründung:

(i) Geometrisch:

Fall1: v und w sind kollinear (parallel). Dann verändert v+2w nur die Länge (und ggfs. Orientierung) des Vektors. Steht u senkrecht auf v und w, so tut er dies offenbar auch auf v+2w!

Fall2: v und w sind nicht kollinear (parallel). Dann spannen diese eine Ebene auf. Der Vektor u, der senkrecht auf v und w steht, steht daher senkrecht auf der Ebene (er heißt Normalenvektor). Da v+2w auch in der Ebene liegt, steht u auch auf ihm senkrecht!

(ii) Algebraisch:

Es gelte: $u^T * v = 0 \wedge u^T * w = 0$. Dann berechnen wir einfach mal $u^T * (v + 2\mathrm{w})$:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 + 2w_1 \\ v_2 + 2w_2 \\ v_3 + 2w_3 \end{pmatrix} = u_1(v_1 + 2w_1) + u_2(v_2 + 2w_2) + u_3(v_3 + 2w_3) =$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + 2(u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) = u^T * v + 2(u^T * w) = 0 + 2 * 0 = 0$$

Also steht u auch senkrecht auf v+2w!

c) Unter oben getroffener Annahme richtig! (Ansonsten lässt sich ein einfaches Gegenbeispiel finden). Wir berechnen einfach mal $u^T * (v + cu)$:

$$u^T * (v + cu) = u_1 * v_1 + u_2 * v_2 + u_3 * v_3 + c(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

Damit das Null ergibt (das ist ja gefordert), setzen wir:

$c = \dfrac{-(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ und erhalten so die gewünschte Lösung, falls $u_1^2 + u_2^2 + u_3^1 \neq 0$.

Sonst aber ist u ja gerade der Nullvektor und steht auf allen Vektoren, also insbesondere auch auf v+cu senkrecht!

<u>Aufgabe 4:</u>

Damit AB und BA überhaupt existieren sei A eine nxm-Matrix und B eine mxn-Matrix. Analog zur Bemerkung zu Aufgabe 1 überlegen wir uns wie wir die Diagonalelemente von AB und BA darstellen können (also gilt dieselbe Formel wie oben, nur mit i=j). Dann erhalten wir zunächst:

$sp(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$ und $sp(BA) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$

(Wer das jetzt nicht "sieht", sollte sich nochmal dahinterknien und manuell die Spur des Produkts einer 3x4-Matrix und einer 4x3-Matrix mit allgemeinen Einträgen der Form a_{ij} ausrechnen und schauen, ob er die Doppelsummen schreibweise dann nachvollziehen kann!)

Wegen der Kommutativität der Multiplikation und der Addition können wir die Elemente etwas umordnen:

$$sp(BA) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = sp(AB)$$