Musterlösung zu Übung 7 in LinA I (LA)

-Dominik Puhst-

Aufgabe 1:

a) Das Volumen des von a,b und c aufgespannte Spats errechnet sich nach $V_s=(a\times b)^T * c$. Setzen wir die gegebenen Werte ein erhalten wir $V_s=0$. Da je zwei der Vektoren linear unabhängig sind (also eine Ebene aufspannen), die drei Vektoren aber kein Spat aufspannen, müssen alle drei Vektoren in einer Ebene liegen.

b) Anwenden des Gaußalgorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 5\\7 & 8\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -3\\0 & -6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-12\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -3\\0 & 0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

Wir stellen fest, dass das LGS eindeutig lösbar ist. Auf jeden Fall ist also c als Linearkombination von a und b darstellbar, d.h. die 3 Vektoren sind linear abhängig. Also ist die Dimension des von a,b,c aufgespannten Vektorraumes (maximal) 2. Das erklärt auch, dass das (dreidimensionale) Spatvolumen 0 ist.

Aufgabe 2:

a) Wir definieren die Addition von a und b als Addition der jeweiligen Komponenten. Also für $a,b\in P^3$: $a+b=(a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$.
Als Skalarmultiplikation definieren wir die Multiplikation mit jeder Komponente. Also für $\lambda\in\mathbb{R}, a\in P^3$: $\lambda a=\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0$

b) Es ist nachzuweisen, dass $\forall\lambda\in\mathbb{R}, a,b\in P^3: \delta x(\lambda a+b)=\lambda\cdot\delta x(a)+\delta x(b)$ gilt. Dazu ist es vermutlich am leichtesten nacheinander die linke und die rechte Seite zu vereinfachen und dann zu vergleichen.

$$\begin{aligned}\text{l.S.: } \delta x(\lambda a+b) &= \delta x(\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &= 3\lambda a_3x^2+2\lambda a_2x+\lambda a_1+3b_3x^2+2b_2x+b_1\\ &= \lambda(3a_3x^2+2a_2x+a_1)+(3b_3x^2+2b_2x+b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{r.S.: } \lambda\cdot\delta x(a)+\delta x(b) &= \lambda\cdot\delta x(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+\delta x(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &= \lambda(3a_3x^2+2a_2x+a_1)+(3b_3x^2+2b_2x+b_1)\end{aligned}$$

Wie wir unschwer erkennen können handelt es sich tatsächlich um eine lineare Abbildung.

Aufgabe 3:

a) Erfreulicherweise ist die Matrix bereits in der gesuchten Form, sodass wir uns rechts daneben nur noch die Einheitsmatrix vorstellen und dann ablesen müssen. So erhalten wir:

$$im(A)=span(\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})\quad \text{und}\quad ker(A)=span(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$$

(Der Basisvektor des Kernes ist gerade der vierte Spaltenvektor der Einheitsmatrix)

Wir erkennen, dass das Bild von A gerade alle Polynome bis zum Grad 2 enthält und der Kern von A gerade alle konstanten Funktionen.

b) Wir überlegen uns erst einmal was wir als Ergebnis der Matrixmultiplikation erwarten...

$$a'=\begin{pmatrix}0\\3a_3\\2a_2\\a_1\end{pmatrix},a''=\begin{pmatrix}0\\0\\6a_3\\2a_2\end{pmatrix},a'''=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\6a_3\end{pmatrix}$$

… und rechnen dann:

$$A*a=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3a_3\\2a_2\\a_1\end{pmatrix}=a'$$

$$A*A*a=A*(A*a)=A*a'=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\3a_3\\2a_2\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\6a_3\\2a_2\end{pmatrix}=a''$$

$$A*A*A*a=A*A*a'=A*a''=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\6a_3\\2a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\6a_3\end{pmatrix}=a'''$$

Das passt also alles. Alternativ hätte man gerne auch zunächst A^2 bzw. A^3 berechnen können, um das Ergebnis dann mit a zu multiplizieren, da die Matrixmultiplikation assoziativ ist.

c) Den Kern von A haben wir ja bereits bestimmt. Wir suchen nun also noch eine spezielle Lösung des LGS, die wir aber einfach ablesen können. Wir erhalten z.B.

$$a_{sp}=\begin{pmatrix}2/3\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass die Lösungsmenge wie folgt aussieht:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}^T\} = \{(a_{sp} + a_0) \in \mathbb{R}^3 : a_0 \in Ker(A)\}$$

$$= \{\begin{pmatrix}2/3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 4:

Wegen $a \in Ker(M)$ gilt ja $M * a = 0$. Das heißt insbesondere, dass jede Zeile von M multipliziert mit a 0 ergibt. Da es sich hierbei aber um nichts anderes als das Skalarprodukt von der Zeile von M und dem Vektor a handelt, beträgt der Winkel[(1)] stets 90°.

(1) Ich erinnere daran, dass wir uns schon nach dem 5. Übungszettel darauf geeinigt haben, dass der Nullvektor mit einem beliebigen Vektor jeden Winkel einschließt. Wem das nicht gefällt, der müsste an dieser Stelle erwähnen, dass der Winkel nur dann 90° beträgt, wenn weder die jeweilige Matrixzeile noch das a aus dem Kern von M der Nullvektor ist.