FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 10, Abgabe 26.06.2019

Lernziele: Die Unstetigkeit der komplexwertigen Logarithmusfunktion verstehen. Wissen, was mit den Begriff "Laurent-Reihe" gemeint ist. Polstellen einer Funktion in der komplexen Zahlenebene rechnen können. Das Residuum einer Funktion ausrechnen können. Geeignete uneigentliche Integrale mit dem Residuensatz ausrechnen können.

Aufgabe 1: (Unstetigkeit der Logarithmusfunktion, Cauchy-Integral)

a) Welchen Wert hat das folgende bestimmte Integral, wenn man für $\xi < a < b$ nur solche Zahlen einsetzt, so dass $\xi \notin [a; b]$?

$$\int_a^b \frac{1}{x-\xi}\, dx.$$

b) Wenn a und b in a) identisch sind, dann ist der Wert des bestimmten Integrals Null ... Es sei denn, die Stammfunktion ist in dem Punkt a unstetig!! Auch im Komplexen sind die Stammfunktionen von $(x-\xi)^k, k \in \mathbb{Z}$, stetige Funktionen, evtl. nicht in dem Punkt ξ (der außerhalb des Integrationsweges [a;b] liegt). Stetigkeit gilt allerdings nicht für die Stammfunktion von $(x-\xi)^{-1}$. Denn: Rufen Sie sich ins Gedächtnis (Aufgabe 2 auf Zettel Nr.3), wie ein (möglicher) natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl definiert ist: $\ln(z) := \ln(|z|) + i \arg(z)$. Geht man in der komplexen Zahlenebene mit z von der unteren in die obere komplexe Halbebene, so springt die komplexe Logarithmusfunktion (unstetig) um den Wert $2\pi i$. Cauchy zeigte, dass

$$\int_{K_r(\xi)} \frac{1}{x-\xi}\, dx = 2\pi i,$$

wobei $K_r(\xi)$ eine Kreislinie um den Mittelpunkt ξ mit Radius r ist: Der Integrationsweg hat also den gleichen Anfangs- wie Endpunkt und enthält nicht den Punkt ξ. Bringen Sie dieses Resultat von Cauchy intuitiv mit dem in Zusammenhang, was Sie in Aufgabe a) gerechnet haben. Der Wert des Integrals ist unabhängig von r und ξ.

Aufgabe 2: (Laurent-Reihe)

a) Schreiben Sie die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = \cos(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

b) Welche Probleme ergeben sich, wenn sie nun versuchen, die Taylorreihe von $\cos(x)\, x^{-1}$ zu schreiben? Wie sähe dagegen nun einfach schreibbar eine Laurent-Reihenentwicklung von $\cos(x)\, x^{-1}$ aus?

c) Welchen Wert hat das Integral

$$\int_{K_r(0)} \frac{\cos(x)}{x}\, dx,$$

wenn Sie die Erkenntnisse von 1)b) verwenden? Tipp: Von allen Summanden der Laurent-Reihe hat nur einer eine unstetige Stammfunktion. Nur das Integral über diesen Summanden hat einen Wert ungleich Null.

Aufgabe 3: (Residuen berechnen)

a) Nehmen Sie an, Sie haben eine Funktion $f(x)$ in eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt x_0 entwickelt. Wie sieht dann die Laurent-Reihe von der Funktion $f(x)(x - x_0)^k$ für gegebene $k \in \mathbb{Z}$ aus? Benutzen Sie Begriffe wie "Indizes verschoben" zur Erklärung!

b) Nehmen Sie an, Sie haben eine Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt x_0 entwickelt. Wie sieht dann die Taylorreihe von $\frac{d}{dx} f(x)$ aus? Wie sieht die Taylorreihe für mehrmaliges Differenzieren aus?

c) Hat man die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - \xi)^k,$$

dann entspricht das Residuum $\mathrm{res}_\xi\, \mathrm{f}$ einfach dem Vorfaktor a_{-1} in der Reihe. Erklären Sie anhand von a) und b), dass man das Residuum auch so ausrechnen kann:

$$res_\xi\, f = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to \xi} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - \xi)^m f(z)\right).$$

wobei $\frac{d^m}{dz^m}$ die m-te Ableitung darstellt und in der Laurent-Reihe alle Vorfaktoren $a_k = 0$ für $k < -m$.

Aufgabe 4: (Uneigentliches Integral ausrechnen können)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

a) Bestimmen Sie die Polstellen von f! Welche Polstelle liegt in der oberen komplexen Halbebene? Hinweis: Nutzen Sie die p-q-Formel, um die Nullstellen des Nenners zu berechnen.

b) Schreiben Sie den Nenner von f als Produkt von zwei Linearfaktoren.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertformel ($m = 1$) aus Aufgabe 3 das Residuum

$$res_{(1+\mathrm{i})} f.$$

d) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z\, \epsilon \text{"}obere\ Polstellen\text{"}} res_z f.$$

Viel Erfolg!