Aufgabe 2: Die wichtigen Aufgaben zuerst!

a) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}$

b) in $x_0 = 0$ ist $\frac{\cos(x)}{x}$ nicht differenzierbar, daher keine Taylorentwicklung möglich.

Als Laurent-Reihe:

$$\frac{\cos(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k-1}$$

Diese Reihe beginnt mit $\underline{\underline{x^{-1}}}$, daher Laurent.

c) Nur der Ausdruck $\int_{K_r(0)} x^{-1} dx$ hat einen von Null verschiedenen Wert:

$$\int_{K_r(0)} \frac{\cos}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{K_r(0)} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k-1} dx$$

Beim Integrieren kann man „gleichweise" integrieren.

$$= \int_{K_r(0)} \frac{1}{x} dx \underset{\text{Cauchy}}{=} 2\pi i$$

Aufgabe 4:

a) Nullstellen von x^2-2x+2 durch

(p,q)-Formel:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

In der oberen Halbebene befindet sich

nur $1+i$.

b) $$f(x) = \frac{1}{(x+i-1)(x-i-1)}$$

($x -$ Nullstelle)

So sehen die

Linearfaktoren aus

c)

$$\operatorname{res}_{1+i} f = \frac{1}{0!} \lim_{x \to 1+i} (x-1-i) \cdot \frac{1}{(x+i-1)(x-i-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1+i} \frac{1}{x+i-1} = \frac{1}{1+i+i-1} = \frac{1}{2i}$$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{x \in \text{obere} \\ \text{Polstellen}}} \operatorname{res}_x f$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{1+i} f = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

Aufgabe 1: Jetzt die weniger wichtigen Dinge

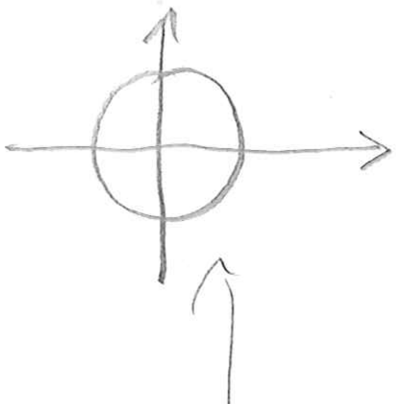
a) Die Stammfunktion von $\frac{1}{x-\xi}$ lautet

$$\ln(|x-\xi|)+C.$$

Für positive Argumente lautet also die Berechnung der Fläche ($\xi < a < b$):

$$\int_a^b \frac{1}{x-\xi}\,dx = \ln(|b-\xi|) - \ln(|a-\xi|)$$
$$= \ln(b-\xi) - \ln(a-\xi)$$

b)



Egal, an welcher Stelle man das Argument einer komplexen Zahl „beginnen" lässt (z.B. $[0,2\pi]$, $[-\pi,\pi]$ oder anders) der komplexe Logarithmus hat immer eine Unstetigkeitsstelle auf dieser Kreislinie. Die „Sprunghöhe" beträgt $2\pi i$

wegen $\ln(x) = \ln(|x|) + \underline{i}\arg(x)$

Der Logarithmus ist unstetig. „Eine unstetige Stammfunktion von $1/x$"

Aufgabe 3

a) Bei Multiplikation von $f(x)$ mit $(x-x_0)^k$ werden die Koeffizienten der Laurent-Reihe nach „rechts" verschoben. Der Koeffizient a_n für $f(x)$ wird nun zum Koeffizient $\tilde{a}_{n+k}$ für $f(x)(x-x_0)^k$

b) Wenn man eine Reihe ableitet, wird aus dem Koeffizient

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

dann $a_n' = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}$ also $\frac{1}{n+1}$ mal der Koeffizient $a_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$.

Die Koeffizienten werden durch $\frac{1}{n+1}$ geteilt und nach „links" verschoben. Die Konstante a_0 verschwindet bei Ableitung.

c) Durch Multiplikation mit $(z-\xi)^m$ wird die Reihe m Schritte nach links verschoben. Durch $(m-1)$-maliges Ableiten wird die Reihe $(m-1)$ Schritte nach rechts verschoben, wobei der konstante Term jeweils verschwindet. $\frac{1}{(m-1)!}$ dient der richtigen Normierung.