FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 11, Abgabe 03.07.2019

Lernziele: Die Bedingung kennen (Satz von Schwarz), unter der Differentialgleichungen (DGL) exakt sind. Wissen, dass man evtl. durch Multiplizieren der Gleichung ("integrierender Faktor", Aufgaben 3) und 4 b)) zu einer exakten DGL kommen kann. Das Verfahren "Trennung der Variablen" als ein Spezialfall der Lösung von exakten DGL kennen. Den Begriff "Variation der Konstanten" als Schritt des Lösungsverfahrens exakter DGL kennen.

Aufgabe 1: (Exakte Diferentialgleichungen)

Wir wollen die Differentialgleichung

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = e^{-y}\,dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$$

lösen. (Das folgende Verfahren wiederholt sich dann bei allen Aufgaben!)

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für die spezielle Wahl von P und Q exakt ist.

b) Integrieren Sie $P(x,y) = e^{-y}$ nach x. Sie erhalten die gesuchte Funktion $U(x,y) = \int e^{-y}dx + c(y)$ mit einer Integrationskonstanten, die (nur) noch von y abhängt. (Das ist die sogenannte "Variation der Konstanten")

c) Um $c(y)$ zu finden, leiten Sie $U(x,y)$ nach y ab und vergleichen das Ergebnis mit $Q(x,y) = 1 - xe^{-y}$. Sie erhalten daraus eine Differentialgleichung für $c(y)$, die Sie einfach lösen können.

d) Die obige Differentialgleichung bedeutet, dass $U(x,y)$ eine Konstante sein muss, also $U(x,y) = c$. Lösen Sie die Gleichung mit dem, was Sie für $U(x,y)$ gefunden haben, nach x *oder* nach y auf.

Aufgabe 2: (Trennung der Variablen)

Manche Differentialgleichungen kann man auch in der Form $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ schreiben, die dann auf jeden Fall exakt ist, weil P von y und Q von x unabhängig sind. In diesem Falle heißt die Lösungsmethode aus Aufgabe 1) dann "Trennung der Variablen". Berechnen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe der Trennung der Variablen:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}$ **b)** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$ **c)** $y' - x^2y = 0$

Aufgabe 3: (Aufpassen bei den integrierenden Faktoren)

Um eine Differentialgleichung in die exakte Form umzuwandeln, muss man manchmal durch Terme teilen. Natürlich darf man nicht durch Null teilen. Daher können bei den Umformungen "Lösungen verlorengehen". Es sollen alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichung bestimmt werden:

$$(2xye^y + y)\,dx + x^2ye^y\,dy = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Multiplizieren Sie die Gleichung mit $\frac{1}{y}$ (für $y \neq 0$) und zeigen Sie, dass die so entstandene Gleichung exakt ist.

c) Lösen Sie die exakte Differentialgleichung aus Teil b) und überprüfen Sie, ob der ausgeschlossene Fall $y = 0$ eine (weitere) Lösung ist.

Aufgabe 4: (Thermodynamik, Integrierender Faktor)

Aus physikalischen Erwägungen über den Zusammenhang von Druck p, Volumen V und Temperatur T, sowie über den Gleichverteilungssatz für die Energie von idealen Gasen, kommt man zu folgender Erkenntnis:

$$\frac{3}{2}c\,dT + \frac{cT}{V}\,dV = 0,$$

wobei c eine Naturkonstante ist.

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung nicht exakt ist.

b) Teilen Sie die Gleichung durch die positive Zahl cT. Zeigen Sie, dass die so gewonnene Gleichung $\frac{3}{2}\frac{1}{T}dT + \frac{1}{V}dV = 0$ exakt ist. Der Fall $T = 0$ (in Kelvin) tritt in der Natur nicht ein.

c) Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie alle Lösungen implizit als eine Funktion $S(T, V) = c$ darstellen! (Sie haben im Prinzip die Entropie des idealen Gases bestimmt.)

Viel Erfolg!