Aufgabe 1:

a) Um zu zeigen, dass die DGL exakt ist, muss man prüfen, dass $\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$ ist.

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-y} = -e^{-y}$$
$$\parallel$$
$$\frac{\partial}{\partial x} 1 - x e^{-y} = -e^{-y}$$

D.h. Die DGL ist exakt.

b) $\int e^{-y}\,dx = x \cdot e^{-y} + c(y) = U(x,y)$

c) $\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) \overset{!}{=} Q(x,y) = 1 - \cancel{x e}^{-y}$

$$\parallel$$

$\frac{\partial}{\partial y}(x \cdot e^{-y} + c(y)) = -x e^{-y} + c'(y)$

$\Rightarrow c'(y) = 1 \quad \Rightarrow c(y) = y + \tilde{c} \quad \Rightarrow U(x,y) = -x e^{-y} + y + \tilde{c}$

d) $U(x,y) = c \qquad c = -x e^{-y} + y$

nach x aufgelöst $\quad x(y) = y \cdot e^{y}$

Aufgabe 2a)

$y^3 dy = x^2 dx \qquad (y \neq 0)$

$\Rightarrow \frac{1}{3} y^4 = \frac{1}{2} x^3 + \tilde{c}$

$\Rightarrow y = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{2} x^3 + c}$

„$\pm$", da 4. Wurzel positive Zahl ergeben und y auch negativ sein kann

$\frac{3}{2} x^3 + c > 0$!

Aufgabe 2(b)

$$y\,dy = \frac{1}{x}\,dx \qquad x \neq 0,\quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \ln(|x|) + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt[2]{2\ln(|x|) + c}$$

y kann positiv und negativ sein

$2\ln(|x|) + c > 0$

c) $\frac{dy}{dx} = x^2 y \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = x^2\,dx$ $y \neq 0$ für diese Umformung

Für den Fall $y = 0$ ergibt sich die Lösung $y(x) = 0$, die auch die DGL erfüllt.

$$\ln(|y|) = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{\frac{1}{3}x^3 + \tilde{c}}$$

$\pm$ wegen Beträgen

$$= \pm c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$= c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

eine reelle Zahl, daher Vorzeichen egal

Aufgabe 3

a) $\frac{\partial(2xye^y+y)}{\partial y} = 2xe^y + 2xye^y + 1$

$\neq$ $\Rightarrow$ nicht exakt

$\frac{\partial(x^2ye^y)}{\partial x} = 2xye^y$

b) Multiplikation mit $\frac{1}{y}$ $\quad y \neq 0$

$$\underbrace{(2xe^y+1)}_{P}dx + \underbrace{x^2e^y}_{Q} dy = 0$$

$\downarrow \partial y \qquad \downarrow \partial x$

$2xe^y = 2xe^y$

$\Downarrow$

exakt

c) $\boxed{\text{Zunächst: } y=0 \text{ ist eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung!}}$

$\int x^2e^y\,dy = x^2e^y + \tilde{c}(x) = u(x,y)$ Integration von $Q(x,y)$ nach y für Potentialfunktion

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &\overset{!}{=} 2xe^y+1 \\ &\overset{!}{=} 2xe^y + \tilde{c}(x)' \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x,y) = 2xe^y + x - c$$

Lösung der DGL:

$c = 2xe^y + x$

Aufgabe 4

a) Exakt wäre die DGL, wenn

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{3}{2}c\right)}_{0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{cT}{V}\right)}_{\frac{c}{V} \neq 0}}$$

Da diese Gleichheit nicht gilt, ist die DGL nicht exakt.

b) Jedoch gilt $\underbrace{\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{T}\right)}_{0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\right)}_{0}$

Daher ist die DGL $\frac{3}{2}\frac{1}{T}\,dT + \frac{1}{V}\,dV = 0$ exakt.

c) $\int \frac{3}{2}\frac{1}{T}\,dT = \frac{3}{2}\ln(|T|) + c(V)$

Verfahren wie bei Aufgabe 1

$$S(T,V) = \frac{3}{2}\ln(|T|) + c(V)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial V} S(T,V)}_{c'(V)} \overset{!}{=} \frac{1}{V}$$

($V, T \neq 0$ war Voraussetzung!)

$$\Rightarrow c(V) = \ln(|V|) + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow S(T,V) = \frac{3}{2}\ln(|T|) + \ln(|V|) + \tilde{c}$$

Alle impliziten Funktionen der Form

$c = \frac{3}{2}\ln(|T|) + \ln(|V|)$ lösen die DGL.