FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 12, Abgabe 10.07.2019

Lernziele: Aus den Anfangswerten einer Differentialgleichung und aus der vorausgesetzten Taylorentwicklung der Lösung der DGL eine Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten der Taylorentwicklung erzeugen können.

Aufgabe 1: (Potenzreihenansatz I)

In der Vorlesung haben Sie ein Verfahren kennengelernt, mit dem man die Reihendarstellung einer Funktion $f(x)$ ausrechnen kann, die eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt. Gesucht ist jetzt eine Funktion $f(x)$ mit

$$2f'' - xf' + f = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1.$$

Nutzen Sie zur Berechnung der Funktion den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei die Koeffizienten durch eine Taylor-Reihe gegeben sind. Für den n-ten Koeffizienten gilt also $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

a) Welcher Entwicklungspunkt x_0 eignet sich aufgrund der Anfangswertaufgabe für die Taylor-Reihe? Bestimmen Sie daraus die Werte für a_0 und a_1.

b) Wie lauten die Potenzreihenentwicklungen für xf' und für f''?

c) Führen Sie eine Indexverschiebung durch, so dass alle Potenzreihen in Teil b) mit $n = 0$ beginnen und jeweils x^n als Potenz besitzen

d) Bestimmen Sie aus der Differentialgleichung und aus den Ergebnissen von c) eine Rekursionsformel für a_{n+2}, wenn a_{n+1} und a_n gegeben sind.

e) Rechnen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel a_2 und a_3 aus.

Aufgabe 2: (Potenzreihenansatz II)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$e^f \cdot f' = 1$$

mit der Anfangsbeding $f(1) = 0$. Nutzen Sie zur Berechnung der Funktion den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei die Koeffizienten durch eine Taylor-Reihe gegeben sind. Für den n-ten Koeffizienten gilt also $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

a) Bestimmen Sie aus der Anfangsbedingung der Differentialgleichung den Wert für a_0 für die sinnvolle Wahl $x_0 = 1$. Bestimmen Sie dann anhand der DGL den Wert für $a_1 = f'(x_0)$.

b) Leiten Sie die Differentialgleichung (auf beiden Seiten der Gleichung) nach x ab, dadurch entsteht ein Term f'' in der neuen (ebenfalls zu erfüllenden) Gleichung.

c) Nutzen Sie die neue Gleichung aus Teil b) und das Resultat aus Teil a) , um a_2 zu bestimmen.

d) Ermitteln Sie nach dem gleichen Verfahren (Ableitung der neuen DGL und Auflösen der Gleichung) den Wert von a_3.

Sie können Ihre Resultate überprüfen, denn die Lösung der DGL ist $f(x) = ln(x)$. Die entsprechende Taylorreihe dürften Sie bereits kennen.

Aufgabe 3*: (Lineare Differentialgleichungen als exakte DGL lösen)

Lineare Differentialgleichungen (Aufgaben 3 und 4) sind nicht Thema der Klausur. Eine lineare Differentialgleichung, in der die Funktion $y(x)$ gesucht und die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ gegeben sind, lautet:

$$y' + p(x)\, y = q(x).$$

a) Zeigen Sie, dass die lineare Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Zeigen Sie, dass mittels integrierendem Faktor $\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}$ die Gleichung exakt wird.

c) Zeigen Sie, dass eine Lösung der linearen Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int (\mu(x)\, q(x))\ dx.$$

Aufgabe 4*: (Lineare Differentialgleichungen mit dem Potenzreihenansatz lösen)

Lineare Differentialgleichungen (Aufgaben 3 und 4) sind nicht Thema der Klausur. Eine lineare Differentialgleichung lässt sich auch näherungsweise (in der Nähe eines Anfangswertes) durch einen Potenzreihenansatz lösen. Dazu muss man in der Gleichung

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

die gegebenen Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ in Taylorreihen entwickeln (Entwicklungspunkt ergibt sich aus den Anfangswerten). Dann macht man für $y(x)$ (so wie in der Aufgabe 1)) einen Taylorreihenansatz. Für die Reihen von $p(x)$ und

$y(x)$ muss man die Produktreihe errechnen (bei Wikipedia lernen). Schließlich bekommt man dann wieder eine Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten der Reihendarstellung von $y(x)$. Machen Sie sich diese Lösungsschritte klar. Falls Sie einen Zugang zu MATLAB haben, dann probieren Sie das Programm aus, das im Zusatzmaterial auf der Seite angegeben ist.

Viel Erfolg!